

SMART<sup>++</sup>

$$\sqrt{\left(\frac{-A}{2}\right)^2 + \left(\frac{-B}{2}\right)^2} - c$$



# รวมสูตร ตัวคณิต! พีชคณิต ADMISSION

$$\int 1 dx = x + c$$

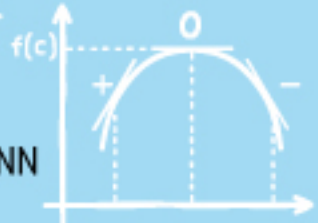
และเตรียมตัวสอบ

ม.4-5-6

$$\lim_{x \rightarrow a}$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + c = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$



โดย ตัวต่อ ANN

รวมสูตร  
ตัวคณิต!  
พีชคณิต **ADMISSION**

และเตรียมตัวสอบ

ม.4-5-6



รวมสูตร ตัวอย่าง! พิธี Admission  
และเตรียมตัวสอบ ม. 4-5-6

ผู้เขียน : ทวีพันธ์ อยู่สุนทร

ราคา 250 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 : มีนาคม 2558

สงวนลิขสิทธิ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

จัดพิมพ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

**SMART<sup>++</sup>**

2387 อาคารรวมทุนพัฒนา ชั้น 3 ถนนเพชรบุรีตัดใหม่  
แขวงบางกะปิ เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทร. 0-2318-4818 (10 คู่สาย)

แฟกซ์ : 0-2318-4809

E-mail : SM8RTINTEL@gmail.com

จัดจำหน่ายโดย : บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)

เลขที่ 1858/87-90 ถนนบางนา-ตราด

แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260

โทรศัพท์ 0-2739-8000

โทรสาร 0-2751-5999

<http://www.se-ed.com>

พิมพ์ที่ : บริษัท แอคทีฟ พรินท์ จำกัด

โทร. 0-2530-4114 (8 คู่สาย)

ข้อมูลทางบรรณานุกรมทอสมุดแห่งชาติ

ทวีพันธ์ อยู่สุนทร.

รวมสูตร ตัวอย่าง! พิธี Admission และเตรียมตัวสอบ ม.4-5-6. --กรุงเทพฯ :

สมาร์ท อินเทลลิเจนท์, 2558.

544 หน้า.

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). 2. คณิตศาสตร์--ข้อสอบและเฉลย.

I. ชื่อเรื่อง.

510.76

ISBN 978-616-7972-00-8



กว่าจะมาเป็นหนังสือเล่มนี้ได้ ก่อนอื่นพีแอนด์ต้องขอขอบคุณคุณพ่อคุณแม่ที่เลี้ยงดูและให้การศึกษา ขอขอบคุณอาจารย์คณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้ให้ความรู้ ให้ความคิด จนปัจจุบันนี้พี้นำความรู้ที่ได้เรียนมาถ่ายทอดในการสอนน้อง ๆ ขอขอบคุณน้อง ๆ Tutor ที่ช่วยในการตรวจและเรียบเรียงข้อความแก้ไขให้สมบูรณ์มากขึ้น ขอขอบคุณ บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด และทีมงานที่ไว้วางใจให้พีได้ทำหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นมาจากประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ของพีแอนด์ ที่มีมากกว่า 5 ปี เพื่อที่จะช่วยน้อง ๆ ที่มีกบ่นว่า...

“โธ้ย!!! ปวดหัว ทำไมคณิตศาสตร์มันยากอย่างงี้...”

“สูตรเยอะจริง จำไม่ไหว ใช้ไม่ถูก!!”

โดยพีแอนด์ได้สรุปสูตรที่จำเป็นต้องใช้ในการทำโจทย์ และเทคนิคที่จะช่วยทำโจทย์ได้เร็วขึ้น ในรูปแบบที่อ่านง่ายและนำไปใช้ได้จริง

เนื้อหาในเล่มนี้มีทั้งหมด 18 บท น้อง ๆ สามารถอ่านเรียงลำดับไปตั้งแต่บทที่ 1 จนถึง 18 หรือเลือกอ่านบทใดก่อนก็ได้ แต่ที่

สำคัญคือ น้อง ๆ จะต้องตั้งใจอ่านให้เข้าใจและฝึกคิดตามตัวอย่างที่มี  
มาด้วย เพราะเมื่อเวลาไปเจอโจทย์จริง น้อง ๆ จะได้รู้วิธีคิดและทำ  
โจทย์ได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง จำไว้ว่า...ความพยายามอยู่ที่ไหน  
ความสำเร็จอยู่ที่นั่นนะคะ...

สุดท้ายนี้พี่ยินดีรับฟังข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะ หรือถ้าน้อง ๆ  
มีคำถามใด ๆ ก็สามารถส่งอีเมลมาหาพี่แอนได้ที่ :

tawinan\_ann@hotmail.com ค่ะ





3

คำนำ

บทที่ 1 ตรีโกณมิติ

15

• ตรีโกณมิติพื้นฐาน	16
• เอกลักษ์ณตรีโกณมิติ	18
• มุมองศาและมุมเรเดียน	21
• การยุบมุมเมื่อมุมมีค่าไม่คุ้นเคย	23
• ตำแหน่งมุมในวงกลม	26
• มุม 2A และมุม 3A	29
• มุมผลรวมและมุมผลต่าง	32
• ตรีโกณผลรวมและผลต่าง	34
• กำลังสองและกำลังสาม	38
• กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ	40
• การหา arc-function (1)	43
• การหา arc-function (2)	46
• กฎของ sin และ cos	51
• พื้นที่สามเหลี่ยม	53



## บทที่ 2 เรขาคณิตวิเคราะห์

57

- จุด จุด จุด : จุดกึ่งกลาง จุดตัดของเส้นมีชัยฐาน 58
- จุด จุด จุด : จุดของรูป จดงานงานาน 61
- จุด จุด จุด : จุดที่ไม่อยู่ตรงกลาง 63
- เส้นตรง : ความชัน 65
- เส้นตรง : สมการเส้นตรง 68
- ระยะห่าง : จุดกับจุด 70
- ระยะห่าง : จุดกับเส้น 71
- ระยะห่าง : เส้นกับเส้น 73
- โพรเจกชัน : ลงบนแกน  $x$  และ  $y$  75
- โพรเจกชัน : ลงบนเส้นตรง  $y = x$  ,  $y = -x$  76
- สมการเส้นแบ่งครึ่งมุม 80
- มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้นตัดกัน 82

85

## บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (DIFFERENTIAL)

- อัตราการเปลี่ยนแปลง 86
- อัตราการเปลี่ยนแปลงประยุกต์กับฟิสิกส์ 87
- สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน 90
- ความชันและเส้นสัมผัสเส้นโค้ง 93
- วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมพัทธ์ : วิธีที่ 1 94
- วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมพัทธ์ : วิธีที่ 2 98

• วิธีหาค่าจุดต่ำสุดและจุดสูงสุดสัมบูรณ์	101
• ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	103
• ฟังก์ชันคอมโพสิท	105
• โจทย์อนุพันธ์	107

## บทที่ 4 อินทิเกรต

111

• สูตรอินทิเกรต	112
• อินทิกรัลจำกัดเขต	116
• อินทิเกรตแยกช่วง	119
• การหาพื้นที่ปิดล้อม (1)	121
• การหาพื้นที่ปิดล้อม (2)	124
• การหาพื้นที่ปิดล้อม (3)	126
• การหาพื้นที่ปิดล้อม (4)	128
• บทประยุกต์ 1 : การคิดอินทิเกรตในฟังก์ชันคอมโพสิท	130
• บทประยุกต์ 2 : ดีฟ และอินทิเกรตเป็นส่วนกลับกัน	132
• บทประยุกต์ 3 : อินทิเกรตประยุกต์กับพีสิคส์	134
• บทประยุกต์ 4 : อินทิเกรตประยุกต์กับตรีโกณมิติ	136

139

## บทที่ 5 ลำดับและอนุกรม

• ลำดับ	140
• การสมมติพจน์ลำดับ	143

• อนุกรม	146
• คุณสมบัติ $\Sigma$	149
• สูตร $\Sigma$	151
• อนุกรมเลขคณิตผสมอนุกรมเรขาคณิต	154
• อนุกรมเทเลสโคปิกเศษส่วน	158
• ลิมิตของลำดับ	160

## บทที่ 6 กำหนดการเชิงเส้น

167

• ทบทวนอสมการเชิงเส้น	168
• กำหนดการเชิงเส้น	172
• โจทย์กำหนดการเชิงเส้น	175

187

## บทที่ 7 ภาคตัดกรวย

• สมการวงกลม	186
• สมการพาราโบลา	190
• สมการวงรี	197
• สมการไฮเพอร์โบลา	204

## บทที่ 8 ลิมิตและความต่อเนื่อง

213

- สูตรของลิมิต 214
- รูปที่ตอบได้โดยและต้องรอลิ้น 217
- รูปที่ต้องรอลิ้นอาจใช้กฎ  $L'$  Hospital 221
- ความต่อเนื่อง 223
- โจทย์ที่ต้องตรวจสอบลิมิตบวกและลบ 226
- โจทย์ทั่วไปของลิมิต 229

233

## บทที่ 9 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

- ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) 234
- สูตรที่ควรนำไปใช้ในโจทย์ expo 238
- ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่มของ expo 240
- ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithm function) 244
- ฟังก์ชันลด ฟังก์ชันเพิ่มของ log และค่าแปลก ๆ 248
- สมการ log และอสมการ log 251

## บทที่ 10 การนับและความน่าจะเป็น

255

- กฎการนับของการคูณ 256
- กฎการนับของการบวก 257

• กฎการนับของการลบ	261
• ค่าแฟกทอริยล (Factorial) !	263
• จัดเรียงของที่แตกต่างกันในแนวเส้นตรง	266
• จัดเรียงของที่แตกต่างกันในแนววงกลม	269
• จัดเรียงของที่เหมือนกันแนวเส้นตรง	272
• จัดเรียงของที่เหมือนกันแนววงกลม	274
• เรียงของติดกันแนวเส้นตรง	276
• เรียงของติดกันแนววงกลม	278
• เรียงของแยกกันแนวเส้นตรง	280
• เรียงของแยกกันแนววงกลม	282
• สับเปลี่ยนของ k อย่างทีละเท่า ๆ กัน	284
• หยิบของเหมือนและของต่าง	288
• ความน่าจะเป็น	289
• ความน่าจะเป็นกับเซต	292
• ทวินาม	295

299

บทที่ 11 ตรรกศาสตร์

• ประพจน์ และตารางค่าความจริง	300
• กฎของประพจน์	302
• การขูบประพจน์	303
• สัจนิรันดร์ (Tautology)	308
• ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ $\forall x, \exists x$	310
• ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ $\forall x \forall y, \forall x \exists y, \exists x \forall y, \exists x \exists y$	312
• สมเหตุสมผลหรือไม่	316

## บทที่ 12 สถิติ ม. ปลาย

319

• ทบทวนสถิติ ม.ต้นกันก่อนนะคะ	321
• ข้อมูลแบบตารางแจกแจงความถี่แบบไม่เป็นอันตรภาคชั้น	325
• ข้อมูลแบบตารางแจกแจงความถี่แบบเป็นอันตรภาคชั้น	329
• การวัดการกระจายข้อมูล	338
• กฎของซิกม่า	343
• การแจกแจงปกติ	345
• เส้นโค้งปกติ (Normal Curve)	349

355

## บทที่ 13 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

• ความสัมพันธ์	356
• โดเมน & เรนจ์	361
• กราฟความสัมพันธ์	367
• อินเวอร์สความสัมพันธ์	372
• กราฟอินเวอร์สของความสัมพันธ์	373
• ฟังก์ชัน	374
• ฟังก์ชันอินเวอร์ส	377
• ฟังก์ชันคอมโพสิต	379
• การบวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชัน	382

## บทที่ 14 จำนวนเชิงซ้อน

385

- จำนวนเชิงซ้อนคืออะไร ?? 386
- การบวก ลบ จำนวนเชิงซ้อน 389
- การคูณหาร จำนวนเชิงซ้อน 390
- คุณสมบัติโมดูลัสของ  $Z$  และสังยุคของ  $Z$  397
- การแก้สมการพหุนาม 401
- การถอดรากที่สอง 404
- จำนวนเชิงจิว 406
- หาผลบวก และผลคูณของรากสมการ 408

411

## บทที่ 15 จำนวนจริง

- ทบทวนเครื่องหมายของสมการและอสมการ 412
- รูปแบบโจทย์ข้อสมการ 414
- รูปแบบโจทย์ค่าสัมบูรณ์ 426
- รูปแบบโจทย์สแควรูท 440
- ทฤษฎีบทเศษเหลือ 444

## บทที่ 16 เมทริกซ์และ DETERMINANT

449

- รูปแบบของเมทริกซ์ (Matrix) 450
- ทราานส์โพสของเมทริกซ์ (Transpose of Matrix) 452

• การบวก ลบ คูณ เมทริกซ์	454
• สมบัติของเมทริกซ์	457
• ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinant)	459
• สมบัติของ det	467
• อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์	470
• สมบัติของอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์	474
• การแก้ระบบสมการโดยใช้อินเวอร์สของเมทริกซ์	476
• การแก้ระบบสมการโดยใช้กฎคราเมอร์	479
• การแก้ระบบสมการโดยเมทริกซ์แต่งเติม	481
• (Augmented Matrix)	
• หา $A^{-1}$ โดยเมทริกซ์แต่งเติม	484

487

บทที่ 17 เวกเตอร์ 

• เวกเตอร์ 2 มิติเบื้องต้น	488
• การบวก ลบ คูณ เวกเตอร์	491
• เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)	494
• การ dot เวกเตอร์	497
• การ Cross เวกเตอร์	505
• เวกเตอร์ 3 มิติ	507
• การ Cross เวกเตอร์ใน 3 มิติ	509
• การหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์	514
• สูตรพื้นที่และปริมาตร	516

## บทที่ 18 เซต

521

- พื้นฐานของเซต 522
- สับเซต 524
- Power Set 528
- แผนภาพของเวอเนอร์ - ออยเลอร์ 531



## เกี่ยวกับผู้เขียน

540

1

ตรี  
โกณ  
มิติ



P'แอน



น้อง A



น้อง B

ในสมัย ม.ต้น เราได้เรียนตรีโกณมิติพื้นฐาน  
มาแล้วนะคะ ใน ม.ปลายเนื้อหาจะเข้มข้นขึ้น  
ซึ่งในบทนี้จะมี 14 หัวข้อให้ศึกษากัน  
โดยจะเริ่มจากการทบทวนตรีโกณมิติพื้นฐาน  
สูตรตรีโกณ ม.ปลายและกราฟตรีโกณมิติค่ะ

# O1.

## ตรีโกณมิติพื้นฐาน

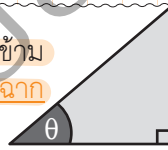


### สูตรที่ต้องจำ ..

$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

ด้านตรงข้ามมุมฉาก



ด้านตรงข้ามมุมที่เราอยากรู้

ด้านชิดมุมที่เราอยากรู้

ส่วนที่เหลือน้องก็สามารถหาค่าได้เลย คือ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$



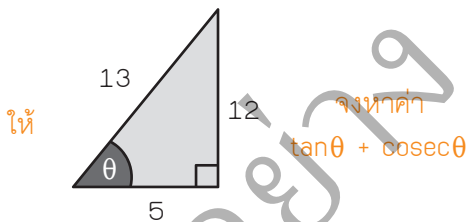
ส่วนกลับของ  $\sin \theta$  คือ  $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

ส่วนกลับของ  $\cos \theta$  คือ  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ส่วนกลับของ  $\tan \theta$  คือ  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$



มาดูวิธีใช้สูตรกัน!



$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{12}{13} \text{ จะได้ } \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{5}{13} \text{ จะได้ } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ } \tan \theta + \csc \theta &= \frac{12}{5} + \frac{13}{12} \\ &= \frac{12 \times 12}{5 \times 12} + \frac{13 \times 5}{12 \times 5} \\ &= \frac{144}{60} + \frac{65}{60} \\ &= \frac{209}{60} \end{aligned}$$

Ans

# 02.

## เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ



### สูตรที่ต้องจำ

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

พอเข้าห้องสอบ  
ใช้วิธีที่พี่จะสอน  
น้องก็จะได้เพิ่ม  
เป็นอีก 2 สูตรเลย



#### วิธีที่ 1

เอา  $\sin^2\theta$  หารตลอดทั้งสมการ  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$$

จะได้  $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$  ← เป็นสูตรที่ 2

#### วิธีที่ 2

เอา  $\cos^2\theta$  หารตลอดทั้งสมการ  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

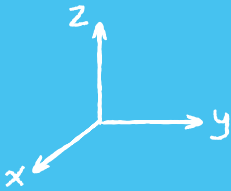
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

จะได้  $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$  ← เป็นสูตรที่ 3

$$\int dx = x + c$$

$$\lim_{x \rightarrow a}$$



รวมสูตรเก่งคณิต

พีชคณิต ADMISSION

และเตรียมตัวสอบ ม.4-5-6

โดยตัวเตอรื ANN

พร้อมสุดยอดเคล็ดลับ

จำสูตรเป็ะเวอริ!



$$\sum_{i=1}^n c$$



**SMART<sup>++</sup>**

ISBN 978-616-7972-00-8

คู่มือเรียน-สอบ

ราคา 250 บาท



9 786167 972008