SMART++

ตะลุยโจทย์

คณิตศาสตร์

เตรียมสอบ มัธยมปลาย

PAT + วิชาสามัญ

เจาะลึกและติวเข้ม!
แนวข้อสอบ PAT & วิชาสามัญ
เพื่อการสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกรูปแบบ

การันตี SURE 100%
ADVANCED
อ่านเลย ติดชัวร์

อัดแน่นด้วยข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลายกว่า 500 ข้อ
พร้อมเฉลยและเทคนิคการทำข้อสอบให้ได้คะแนนเต็ม!

เนื้อหาเข้มข้น อ่านเข้าใจง่าย! เล่มเดียวเนื้อหาครบ!

ติวเตอร์ ANN
ทวินันท์ อยู่สุนทร

ตะลุยโจทย์ คณิตศาสตร์
เตรียมสอบมัธยมปลาย
PAT + วิชาสามัญ

ตะลุยโจทย์ คณิตศาสตร์
เตรียมสอบมัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

ผู้เขียน : ทวินันท์ อยู่สุนทร

ราคา 000 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 : มีนาคม 2560

สงวนลิขสิทธิ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

จัดพิมพ์โดย : **บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด**

SMART++ 2387 อาคารรวมทุนพัฒนา ชั้น 3 ถนนเพชรบุรีตัดใหม่
แขวงบางกะปิ เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทร. 0-2318-4818 (10 คู่สาย)
แฟกซ์ : 0-2318-4809
E-mail : SM8RTINTEL@gmail.com

จัดจำหน่ายโดย : **บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด (มหาชน)**
เลขที่ 1858/87-90 ถนนบางนา-ตราด
แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260
โทรศัพท์ 0-2739-8000
โทรสาร 0-2751-5999
http://www.se-ed.com

พิมพ์ที่ : **บริษัท แอคทีฟ พริ้นท์ จำกัด**
โทร. 0-2530-4114 (8 คู่สาย)

ข้อมูลทางบรรณานุกรมหอสมุดแห่งชาติ

.

ข้อสอบคณิตศาสตร์.-- กรุงเทพฯ : สมาร์ท อินเทลลิเจนท์, 2560.
หน้า.
1. .

ISBN 978-616-

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นมาในรูปแบบของตะลุยโจทย์ที่ครอบคลุมข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ทั้งพื้นฐานและเพิ่มเติมที่น้อง ๆ ใช้สอบกันทั้งโจทย์ O-NET, วิชาสามัญ, PAT โดยโจทย์แต่ละข้อจะมีระดับความยากง่ายคละกัน ในส่วนของเฉลยพี่แอนได้ใส่เทคนิคการคิดให้ทุกข้อด้วย ว่าข้อนั้นต้องมีความรู้เรื่องอะไรบ้าง ถ้าเรื่องไหนที่น้องไม่เข้าใจก็จะได้กลับไปทบทวนได้ถูกจุด ที่สำคัญอยู่ที่ความตั้งใจและฝึกทำโจทย์เยอะ ๆ อยู่ในห้องสอบน้องจะทำโจทย์ได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง

หนังสือเล่มนี้เกิดขึ้นได้เนื่องจากมีบุคคลหลายท่านอยู่เบื้องหลัง ก่อนอื่นต้องขอขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่เลี้ยงดูและให้การศึกษาเป็นอย่างดี ขอบคุณคุณครู อาจารย์คณิตศาสตร์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาจนพี่ได้นำความรู้สิ่งที่ได้เรียนมา มาถ่ายทอดให้น้อง ๆ ได้ ขอบคุณพี่บอล บิ๊ก น้องไอซ์ ติวเตอร์ทุกคนที่ช่วยตรวจทานและเรียบเรียงแก้ไขให้สมบูรณ์มากขึ้น ขอบคุณ บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด และทีมงานที่ไว้วางใจให้พี่ได้ทำหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา

สุดท้ายนี้พี่ยินดีรับฟังข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะ หรือถ้าน้อง ๆ มีคำถามใด ๆ สงสัย ส่งอีเมลมาหาพี่แอนได้เลยที่ tawinan_ann@hotmail.com และ Inbox เข้ามาคุยที่ facebook See U Bright

ทวินันท์ อยู่สุนทร
ติวเตอร์แอน

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	3
สารบัญ	4

ตะลุยโจทย์ คณิตศาสตร์ เตรียมสอบมัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

ข้อสอบพร้อมเฉลย

บทที่ 1 : ตรีโกณมิติ	5
บทที่ 2 : ภาคตัดกรวย	41
บทที่ 3 : อนุพันธ์ของฟังก์ชันและอินทิเกรต	71
บทที่ 4 : ลำดับและอนุกรม	103
บทที่ 5 : กำหนดการเชิงเส้น	137
บทที่ 6 : ลิมิตและความต่อเนื่อง	149
บทที่ 8 : การนับและความน่าจะเป็น	187
บทที่ 9 : ตรรกศาสตร์	219
บทที่ 10 : สถิติ	237
บทที่ 11 : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	285
บทที่ 12 : จำนวนเชิงซ้อน	295
บทที่ 13 : จำนวนจริง	315
บทที่ 14 : เมทริกซ์	351
บทที่ 15 : เวกเตอร์	377
บทที่ 16 : ทฤษฎีจำนวน	401
บทที่ 17 : เซต	423
เกี่ยวกับผู้เขียน	443

บทที่ 1

ข้อสอบ + เฉลย

ตรีโกณมิติ

★ ข้อสอบ ตรีโกณมิติ ★

1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 2 หน่วย แล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับข้อใด

1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย

2) $\frac{4}{3}$ หน่วย

3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ หน่วย

4) $\frac{3}{2}$ หน่วย

5) $\frac{3}{4}$ หน่วย

2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 480 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 60% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่ง แล้วเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ยาวกี่เซนติเมตร

1) 120 เซนติเมตร

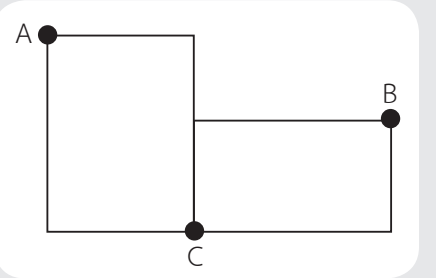
2) 40 เซนติเมตร

3) $32 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

4) $48 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

5) $64 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

3 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปมีขนาดเท่ากัน โดยมีเส้นทแยงมุมเป็นสามเท่าของด้านกว้าง ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองมาวางต่อกันดังรูป จุด A และจุด B อยู่ห่างกันเป็นระยะกี่เท่าของด้านกว้าง



1) 1.5 **2)** 3 **3)** $\sqrt{2}$ **4)** $3\sqrt{2}$ **5)** 4.5

4 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{3}{4}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ตารางหน่วย **2)** $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ตารางหน่วย **3)** $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ตารางหน่วย

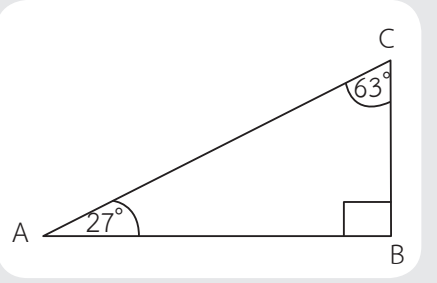
4) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ตารางหน่วย **5)** $\frac{7\sqrt{7}}{8}$ ตารางหน่วย

5 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 24 ตารางหน่วย และ $\tan A\hat{B}D = \frac{1}{6}$ ถ้า AE ตั้งฉากกับ BD และ AE ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\sqrt{37}}{6}$ หน่วย **2)** $\frac{12}{\sqrt{37}}$ หน่วย **3)** $\frac{2\sqrt{37}}{6}$ หน่วย

4) $\frac{3\sqrt{37}}{12}$ หน่วย **5)** $\frac{4\sqrt{37}}{12}$ หน่วย

6 จากรูป



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1) $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$

2) $\sin 27^\circ = \cos 27^\circ$

3) $\cos 27^\circ = \tan 27^\circ$

4) $\tan 27^\circ = \cos 63^\circ$

5) $\cos 90^\circ = \sin 90^\circ$

7 ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1) $\sin 30^\circ > \sin 45^\circ$

2) $\cos 30^\circ > \cos 45^\circ$

3) $\tan 45^\circ > \cot 45^\circ$

4) $\tan 60^\circ > \cot 60^\circ$

5) $\sin 37^\circ > \cos 53^\circ$

8 โดยการใช้ตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
72°	0.951	0.309
73°	0.956	0.292
74°	0.961	0.276
75°	0.966	0.259

มุมภายในที่มีขนาดใหญ่เป็นอันดับ 2 ของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 7, 24 และ 25 หน่วย มีขนาดใกล้เคียงกับข้อใดมากที่สุด

1) 72° **2)** 73° **3)** 74°

4) 75° **5)** ไม่มีข้อใดถูกต้อง

9 มุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากับ 30 องศา ถ้าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว $3 - \sqrt{3}$ ฟุตแล้ว ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองมีความยาวเท่าใด

1) $2 - \sqrt{3}$ ฟุต

2) $2 + \sqrt{3}$ ฟุต

3) $2\sqrt{3} - 3$ ฟุต

4) $2\sqrt{3} + 3$ ฟุต

5) $3\sqrt{3} + 3$ ฟุต

10 กล้องวงจรปิดซึ่งถูกติดตั้งอยู่สูงจากพื้นถนน 3 เมตร สามารถจับภาพได้ต่ำที่สุดที่มุมก้ม 45° และสูงที่สุดที่มุมก้ม 30° ระยะทางบนพื้นถนนในแนวกล้องที่กล้องนี้สามารถจับได้คือเท่าใด (กำหนด $\sqrt{3} \approx 1.73$)

1) 1.00 เมตร **2)** 1.46 เมตร **3)** 2.19 เมตร

4) 3.46 เมตร **5)** 4.14 เมตร

11 $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $-\frac{1}{7}$ **2)** $-\frac{1}{9}$ **3)** $\frac{1}{9}$ **4)** $\frac{1}{7}$ **5)** 9

12 กำหนดให้ ABC เป็น Δ หน้าจั่วซึ่งมีด้าน AB = AC ถ้ามุม A = 150° และด้าน BC ยาวเท่ากับ 16 หน่วย แล้ว 2 เท่าของพื้นที่ Δ ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{64}{3}$ ตร.หน่วย

2) $128\,(2 - \sqrt{3})$ ตร.หน่วย

3) $64\,(3 - \sqrt{2})$ ตร.หน่วย

4) $64\,(2 - \sqrt{3})$ ตร.หน่วย

5) $128\,(2 + \sqrt{3})$ ตร.หน่วย

13 กำหนดให้ ABC เป็นรูป Δ ซึ่งมีด้าน AB และ AC ยาวเท่ากับ 3 หน่วยและ 5 หน่วยตามลำดับ ถ้า $\arccos\left(-\frac{1}{15}\right) = B + C$ แล้วความยาวรอบรูป Δ ABC คือข้อใด

1) $8 + 4\sqrt{2}$ หน่วย

2) $4 + 4\sqrt{2}$ หน่วย

3) $8 + 4\sqrt{5}$ หน่วย

4) $4 + 5\sqrt{2}$ หน่วย

5) $8 + 5\sqrt{3}$ หน่วย

14 ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $2\arcsin(x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) 2 **2)** 3 **3)** 4 **4)** 6 **5)** 8

15 กำหนดให้ ABC เป็นรูป Δ ที่มีมุม $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ $\hat{A} \leq \hat{B}$ ถ้า $(\cos 2A + \cos B)^2 + (\sin 2A + \sin B)^2 = 3$ แล้ว $\tan^4 3A$ มีค่าเท่าใด

1) 81 **2)** 1 **3)** $\sqrt{3}$ **4)** 16 **5)** $\frac{1}{9}$

16 กำหนดให้ a และ b เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A และมุม B ของรูป Δ ABC ตามลำดับ ถ้า $2b = 3a$ และ $\hat{B} = 2\hat{A}$ แล้ว $|\cos^2 A|$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) $\frac{2}{3}$ **2)** $\frac{4}{9}$ **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** $\frac{9}{16}$ **5)** $\frac{12}{25}$

17 กำหนดให้ $\alpha, \beta \in [-\pi, 0]$ ถ้า $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{-2}{3}$ และ $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ แล้ว $-\alpha - \beta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{\pi}{6}$ **2)** $\frac{\pi}{3}$ **3)** $\frac{2\pi}{3}$ **4)** $\frac{4\pi}{3}$ **5)** $\frac{5\pi}{3}$

18 ผลบวกของ $\sec^2(2\tan^{-1}\sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 2 **2)** 3 **3)** 8 **4)** 9 **5)** 16

19 กำหนดให้รูป Δ ABC มีมุม A, B เป็นมุมแหลม ถ้า $\cos 2A + 3\cos 2B = -2$ และ $\cos A - \sqrt{2}\cos B = 0$ แล้ว $5\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
2) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
3) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$
4) $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
5) $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

20 ค่าของ $\cos\frac{7\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{8\pi}{3}\right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1) $-\frac{3}{4}$ **2)** $-\frac{9}{4}$ **3)** $\frac{3}{4}$ **4)** $\frac{9}{4}$ **5)** $\frac{6}{13}$

21 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

ข. $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ $\left(\text{ให้ } \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1) ข้อ ก และ ข ถูก

2) ข้อ ก ถูก ข ผิด

3) ข้อ ก ผิด ข ถูก

4) ข้อ ก และ ข ผิด

5) ไม่สามารถสรุปได้

22 ถ้า θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta)^2$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

2) $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

3) $\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

4) $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

5) ไม่มีข้อถูก

23 ให้ a, b เป็นค่าคงที่ และ $f(x) = a\sin x + bx\cos x + x^2$ สำหรับทุกค่า $x \in R$ ถ้า $f(2) = 3$ แล้ว $f(-2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -3 **2)** -1 **3)** 1 **4)** 3 **5)** 5

24 กำหนดให้ $\tan\alpha = \frac{\sin\beta - \cos\beta}{\sin\beta + \cos\beta}$ แล้ว $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta}$ เท่ากับข้อใด

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **2)** 1 **3)** $\sqrt{2}$ **4)** $\sqrt{3}$ **5)** $\frac{1}{\sqrt{3}}$

25 กำหนดให้ $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ แล้ว $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ จงหาค่า $\sin 2\alpha \sin 2\beta$

1) $\frac{-12\sqrt{3}}{25}$

2) $\frac{-6\sqrt{3}}{25}$

3) $\frac{6\sqrt{3}}{25}$

4) $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

5) $\frac{-18\sqrt{3}}{25}$

26 ถ้า $\cos A=\frac{3}{4}$ แล้ว $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{11}{32}$ 2) $\frac{11}{16}$ 3) $\frac{9}{16}$ 4) $\frac{9}{12}$ 5) $\frac{9}{32}$

27 ถ้า $3\cos 2\alpha-2\cos 2\beta=-3$ และ $\sin\alpha-2\sin\beta=0$ โดยที่ $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ แล้ว $\sin(\alpha+\beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ 4) 1 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28 ให้ $a=\cos^2 40^\circ+\cos^2 20^\circ-\cos^2 10^\circ$ และ $b=(\cot 10^\circ-\tan 10^\circ)\tan 20^\circ$ จงหา $2a+b$

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4 5) 5

29 จงหาค่าของ $8\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$

1) 1 2) 2 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sqrt{3}$ 5) -1

30 ถ้า $\frac{1}{\sin\theta+1}-\frac{1}{\sin\theta-1}=4$ เมื่อ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ แล้ว $\sin\theta\sec\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -2 2) -1 3) 0 4) 1 5) 2

31 ให้ $\sin 3\theta+\sin\theta=1-4\sin^3\theta$ แล้ว $\sec 2\theta+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{7}{8}$ 2) $\frac{9}{8}$ 3) $\frac{25}{28}$ 4) $\frac{39}{28}$ 5) $\frac{42}{35}$

32 จำนวนจริง x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $2\sin^2 x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2\sin^2 x + \sin x}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1) $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ **2)** $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ **3)** $[\pi, 2\pi]$

4) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup [2\pi]$ **5)** ไม่มีข้อใดถูก

33 ให้ $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ แล้ว $\cos 2\theta$ เท่ากับข้อใด

1) 0.28 **2)** 0.48 **3)** 0.56 **4)** 0.96 **5)** 1

34 เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1 + x) + \arctan(1 - x) = \frac{\pi}{4}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

1) $(-4, 0)$ **2)** $(-3, 1)$ **3)** $(-2, 2)$

4) $(-1, 3)$ **5)** $(0, 3)$

35 ค่าของ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan x\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{-2x}{1 + x^2}$ **2)** $\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **3)** $\frac{2x}{1 - x^2}$

4) $\frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ **5)** $\frac{-2x}{1 - x^2}$

36 ในรูป Δ ABC ถ้า $\frac{\sin A}{2} = \frac{3\sin B}{8} = \frac{3\sin C}{10}$ แล้วมุมที่ใหญ่ที่สุดกางกี่องศา

1) 75° **2)** 90° **3)** 120° **4)** 135° **5)** 150°

37 ถ้า A(1, 2), B(4, 3) และ C(3, 5) เป็นจุดยอดของ ΔABC แล้ว $\sin\frac{B}{2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{50} - 1}{\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$ **2)** $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{50} + 1}{\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$ **3)** $\left(\frac{\sqrt{50} + 1}{2\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$

4) $\left(\frac{\sqrt{50} - 1}{2\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$ **5)** ไม่มีข้อถูก

38 $\frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\tan\theta - \sin\theta\cos\theta}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1) $2\cot^2\theta$

2) $2\cot\theta$

3) $2\cot^2\theta\sec^2\theta$

4) $2\cos\theta\operatorname{cosec}\theta$

5) $2\operatorname{cosec}^2\theta$

39 ค่าของ $\tan\left(2\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -1 **2)** 1 **3)** $\frac{4}{3}$ **4)** $-\frac{4}{3}$ **5)** $-\frac{1}{2}$

40 ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2\arcsin x$ แล้วค่าของ $(fog)(\frac{1}{3})$ คือข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{4}{9}$

2) $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{8})$

3) $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$

4) $\frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$

5) $5\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{3}$

41 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{4}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ ค่าของ $\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{16}{65}$ **2)** $-\frac{16}{65}$ **3)** $\frac{48}{65}$ **4)** $\frac{33}{65}$ **5)** $\frac{-33}{65}$

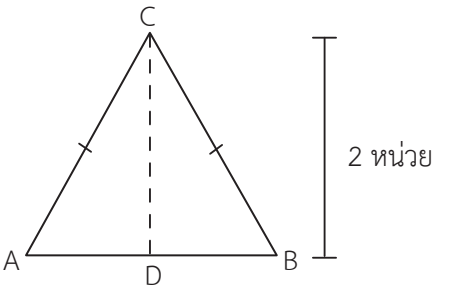
42 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้ามุม B เท่ากับ 60° $a = 8$ และ $c - b = 2$ แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 14 **2)** 16 **3)** 36 **4)** 45 **5)** 48

เฉลยข้อสอบ ตรีโกณมิติ

1 **ตอบ ข้อ 3** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยม ACD



$$(AC)^2 = (AD)^2 + (CD)^2$$

$$= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2^2$$

$$= \frac{(AC)^2}{4} + 4$$

$$\frac{3(AC)^2}{4} = 4$$

$$(AC)^2 = \frac{16}{3}$$

$$AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

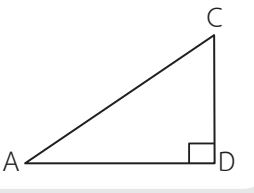
ดังนั้น $$AC = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

เทคนิค

Δ ด้านเท่า ด้านทุกด้าน มุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน

สูตรพีทาโกรัส



$AC^2 = AD^2 + CD^2$

2 ตอบ ข้อ 5 $64 + 8\sqrt{34}$

วิธีทำ จากสูตรพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉาก $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$สูง

$$480 = \frac{1}{2}(x)(0.60x)$$

$$\frac{960}{0.60} = x^2$$

$$1{,}600 = x^2$$

$$x = 40$$

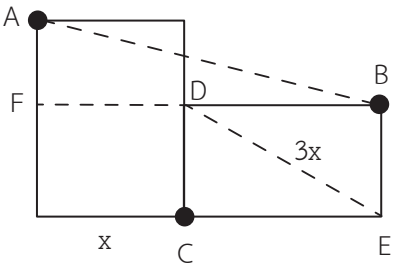
และความยาวด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งคือ $0.60x = 0.60 \times 40 = 24$ จะได้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น $8\sqrt{34} = 64 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

เทคนิค

ให้ความยาวที่โจทย์ให้มาคิดเป็นอัตราส่วนเพื่อหาด้านใดด้านหนึ่งและจะได้คำตอบจากการคูณอัตราส่วนเพื่อหาอีกด้านหนึ่งและจะสามารถหาค่าได้

สูตร พื้นที่ $\Delta = \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

3 ตอบ ข้อ 4 $3\sqrt{2}$



พิจารณาสามเหลี่ยม BDE

เส้นตรง BD $= \sqrt{(3x)^2 - x^2} = x\sqrt{8}$ และเส้นตรง DF $= x$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABF

เส้นตรง BF $= x\sqrt{8} + x = x(\sqrt{8} + 1)$ และเส้นตรง AF $= x\sqrt{8} - x = x(\sqrt{8} - 1)$

จากสามเหลี่ยมพีทาโกรัส

$AB^2 = BF^2 + AF^2$

เส้นตรง AB $= \sqrt{(x(\sqrt{8}+1))^2 + (x(\sqrt{8}-1))^2}$

$= \sqrt{x^2(8 + 2\sqrt{8} + 1) + x^2(8 - 2\sqrt{8} + 1)}$

$= x\sqrt{18}$

$= 3\sqrt{2}\,x$

ดังนั้น เส้นตรง AB มีความยาวเป็น $3\sqrt{2}$ เท่าของด้านกว้าง

เทคนิค

ให้กำหนดเส้นทแยงมุมเพื่อนำมาหาด้านที่เราต้องการจาก Δ พีทาโกรัส วาดเส้นทแยงมุมและลองกำหนดค่าเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ

4 ตอบ ข้อ 2 $\frac{\sqrt{7}}{6}$

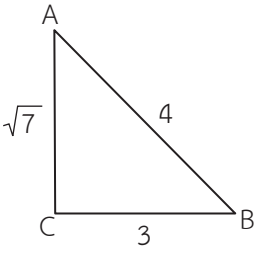
วิธีทำ

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$4^2 = (AC)^2 + 3^2$

$(AC)^2 = 7$

$AC = \sqrt{7}$



ถ้า BC ยาว 3 หน่วย AC ยาว $\sqrt{7}$ หน่วย

ถ้า BC ยาว 1 หน่วย AC ยาว $\frac{\sqrt{7}}{3}$ หน่วย

ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ BC ยาว 1 หน่วย $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{6}$ ตารางหน่วย

เทคนิค

เรารู้ว่ามุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{3}{4}$

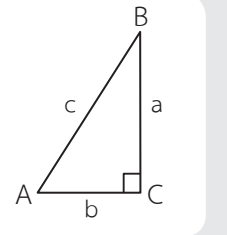
เราสามารถหาค่า AC ได้จากพีทาโกรัส

ทำให้เรารู้ได้ว่า AC ยาว $\sqrt{7}$ หน่วย

เมื่อโจทย์กำหนดให้ BC เป็น 1 จึงนำไปทำเป็นอัตราส่วน

เมื่อ BC เป็น 1; AC $= \frac{\sqrt{7}}{3}$

จึงนำไปหาพื้นที่ได้ $\frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง



5 ตอบ ข้อ 2 $\frac{12}{\sqrt{37}}$

วิธีทำ

พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = กว้าง x ยาว

$24 = xy$ ——— ❶

เนื่องจาก $\tan A\hat{B}C = \frac{1}{6}$

จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$\tan A\hat{B}C = \frac{x}{y}$

$\frac{1}{6} = \frac{x}{y}$

$y = 6x$

แทน $y = 6x$ ใน ❶ จะได้

$24 = 6x^2$

$x^2 = 4$

$x = 2$

เนื่องจาก AE ตั้งฉากกับ BD ที่จุด E จากรูปสามเหลี่ยม ABD

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$= 12^2 + 2^2$

$= 144 + 4$

$= 148$

$BD = \sqrt{148}$

เนื่องจาก พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABD $= \frac{1}{2} \times AD \times AB$

$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$

จะได้ $AD \times AB = BD \times AE$

$2 \times 12 = \sqrt{148} \times AE$

$AE = \frac{2 \times 12}{\sqrt{148}} = \frac{12}{\sqrt{37}}$

เทคนิค

ให้หาพื้นที่ของ ▨ เพื่อแทนในสมการ $\tan\theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ชิดมุม}}$ และแทนค่า $\tan\theta$ เป็นสมการ และได้ 2 สมการ 2 ตัวแปรก็จะหาค่ากว้าง ยาว ของ ☐ ได้ และหลังจากนั้นค่อยหาความยาว AE

6 **ตอบ ข้อ 1** $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$

วิธีทำ $\sin 27^\circ = \frac{BC}{AC}$ และ $\cos 63^\circ = \frac{BC}{AC}$

แสดงว่า $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$

เทคนิค

สูตรค่าตรีโกณมิติพื้นฐาน $\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

$\cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

$\tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

7 **ตอบ ข้อ 1** $\sin 30^\circ > \sin 45^\circ$

อัตราส่วนตรีโกณมิติ / θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

เทคนิค

ต้องทราบค่าพื้นฐานของ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ของมุม 30°, 45°, 60°

8 **ตอบ ข้อ 3** 74°

วิธีทำ โดยมุมที่ใหญ่เป็นอันดับ 2 คือ มุมที่มีค่าระหว่างมุมสั้นที่สุดและมุม 90°

$\cos x = \frac{7}{25} = 0.280 \approx 0.276$ เพราะฉะนั้น $x = 74^\circ$

นั่นคือ มุมภายในที่ใหญ่เป็นอันดับ 2 มีค่าประมาณ 74 องศา

เทคนิค

พิจารณา 7, 24, 25 เป็น Δ มุมฉาก โดยถ้าต้องการหามุมที่กว้างที่สุดต้องหาค่าที่มีน้อยที่สุด คือ $\frac{7}{25}$ โดยการใช้ cos เพื่อหาคำตอบ

9 **ตอบ ข้อ 3** $2\sqrt{3} - 3$

วิธีทำ ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองคือ ด้านตรงข้ามมุม 60° ให้ยาวเป็น x

ดังนั้น ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ $\frac{x}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

ด้านที่สั้นที่สุดยาวเท่ากับ $\frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}x}{3}$

ดังนั้น $3 - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}x}{3} + x + \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

$= x(1 + \sqrt{3})$

จะได้ว่า $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

$= \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

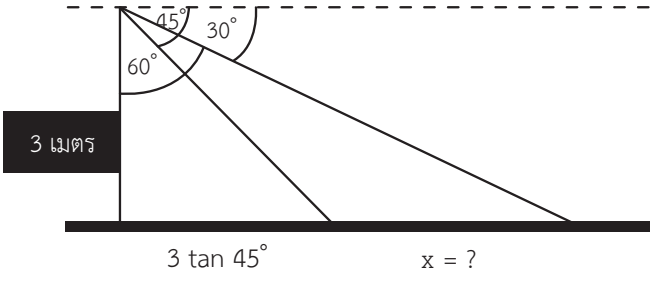
$= 2\sqrt{3} - 3$

เทคนิค

ให้เทียบอัตราส่วนโดยใส่ตรีโกณมิติเข้ามาช่วย ในเรื่องของสมบัติ $\cos\theta$ และการหาค่า $\tan\theta$

10 ตอบ ข้อ 3 2.19

วิธีทำ จากโจทย์ วาดรูปได้กราฟดังนี้



ดังนั้น $3\tan 60^\circ - 3\tan 45^\circ = 3\sqrt{3} - 3$

$\approx 3 \times 1.732 - 3 = 2.19$

เทคนิค

ให้นำข้อความที่ได้มาวาดเป็นรูป เพื่อให้ง่ายต่อการมองรูปและการคิด โดยให้ใช้สมบัติของตรีโกณมิติและ Δ คล้ายมาเพื่อหาคำตอบ

11 ตอบ ข้อ 4 $\frac{1}{7}$

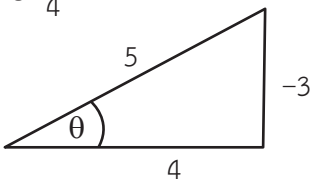
วิธีทำ $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right)}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right)}$

พิจารณา $\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) = \theta$ ซึ่งเป็นมุมที่ sin แล้วเป็นลบ ดังนั้นจึงอยู่ Q_3 หรือ Q_4

โดยในขณะที่เรนจ์ของ arcsin คือ Q_1 หรือ Q_4 ดังนั้นมุม θ จึงเป็นมุมใน Q_4

$\therefore \tan\theta$ จึงเป็นค่าลบ โดยจะเห็นว่า $\tan\theta$ จะเท่ากับ $\frac{-3}{4}$

ดังนั้น $\tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right) = \frac{-3}{4}$



แทนค่าจะได้ $\frac{1 + \left(\frac{-3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{-3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$ $\therefore \tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{1}{7}$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตร $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ มาใช้พิจารณา

และถ้าสูตรมุมผลต่างจะเป็น $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

หลังจากนั้นจึงค่อยตรวจสอบค่ามุมที่เป็นไปได้ในแต่ละ Q แล้วจึงแทนค่า

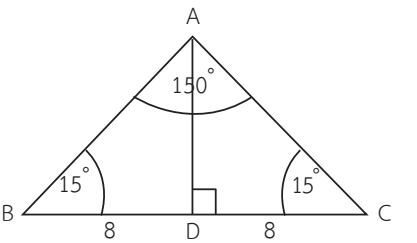
โดยมุมที่เป็นบวกแต่ละ Q คือ

sin	All
tan	cos

12 ตอบ ข้อ 2 $128(2-\sqrt{3})$

วิธีทำ ลองวาดรูปจากข้อมูลที่โจทย์ให้มา จะได้ว่ามุม C และ B จะเท่ากับ $\frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$ แล้วลากเส้น AD ลงมาตั้งฉากเส้น BC

โดยที่ $\tan C = \frac{AD}{CD}$ ดังนั้น $\tan 15^\circ = \frac{AD}{8}$



$$\tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ + \tan 45^\circ} = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{AD}{8}$$

$$\therefore AD = \frac{8(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(3-2\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= 8(2-\sqrt{3})$$

ดังนั้น $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 16 \times 8(2-\sqrt{3})$

$$= 64(2-\sqrt{3})$$

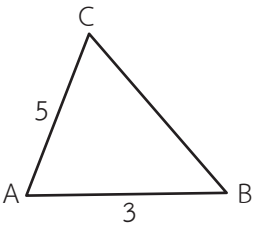
$\therefore$ 2 เท่าของพื้นที่ ΔABC จึงเท่ากับ $2(64)(2-\sqrt{3}) = 128(2-\sqrt{3})$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องหามุมที่เหลือจากข้อมูลโจทย์แล้วจึงหาความสัมพันธ์ของค่ามุม โดยมุมภายใน Δ รวมกัน $= 180^\circ$ จึงทำให้รู้ค่ามุมที่เหลือ หลังจากนั้นใช้สูตร $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ แล้วจึงไปหาพื้นที่ ΔABC โดย พท. ΔABC = 2 พท. ΔABD

13 ตอบ ข้อ 1 $8 + 4\sqrt{2}$

วิธีทำ เราจะหาด้าน BC โดยใช้กฎของ cos ที่มุม A



จากข้อมูล $\arccos\left(\frac{-1}{15}\right) = B + C$ ดังนั้น $\cos(B + C) = -\frac{1}{15}$

ดังนั้น $\cos A$ จึงเท่ากับ $-\cos(B + C) = -\left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15}$

(เนื่องจากมุม A, B, C รวมกันเท่ากับ 180°)

สรุปแล้วใช้กฎ cos จะได้ $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos A$

$$= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)(\tfrac{1}{15}) = 32$$

ดังนั้น $BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ ความยาวรอบรูป $\Delta ABC = 5 + 3 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องหาด้านที่เหลือโดยใช้กฎของ cos คือ $C^2 = A^2 + B^2 - \cos\theta$ แล้วจึงสามารถหาความยาวรอบรูป Δ ได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ของ $\arccos(A) = B \ \therefore \cos B = A$

14 ตอบ ข้อ 2 3

วิธีทำ จากโจทย์ $2\arcsin(x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$

$$\arcsin(x^2 - 3x + 1) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = x^2 - 3x + 1$$

$$-1 = x^2 - 3x + 1$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1, 2$$

ดังนั้น $|1 + 2| = |3| = 3$

เทคนิค

ข้อนี้ย้ายสมการให้เหลือ arcsin แล้วจึงแก้สมการหาค่า x แล้วจึงนำค่า x ที่ได้ทั้งหมดไปบวกกัน ใช้หลักการที่ $\arccos(A) = B \ \therefore \cos B = A$ และหลังจากนั้นต้องการหาค่า x โดยการแก้สมการ

15 ตอบ ข้อ 5 $\frac{1}{9}$

วิธีทำ $(\cos 2A + \cos B)^2 + (\sin 2A + \sin B)^2 = 3$

$\cos^2 2A + 2\cos 2A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 2A + 2\sin 2A \sin B + \sin^2 B = 3$

$(\cos^2 2A + \sin^2 2A) + (\cos^2 B + \sin^2 B) + 2\cos 2A \cos B + 2\sin 2A \sin B = 3$

$1 + 1 + 2(\cos 2A \cos B + \sin 2A \sin B) = 3$

$\therefore \cos(2A - B) = \frac{1}{2}$

โดยโจทย์ให้ C เป็นมุมฉาก ดังนั้น $A + B = 90^\circ$ และ $A \leq B$ ดังนั้น $0 \leq A \leq 45^\circ$, $45^\circ \leq B \leq 90^\circ$

ดังนั้น มุมที่จะเป็นไปได้ของ $2A - B$ คือ $-90^\circ \leq 2A - B \leq 45^\circ$

แต่ $\cos(2A - B) = \frac{1}{2}$ ดังนั้นมุม $2A - B$ จึงเท่ากับ -60°

จะได้ $2A - B = -60^\circ$ ——❶

$A + B = 90^\circ$ ——❷

ดังนั้น $3A = 30^\circ$

$\therefore \tan^4 30^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องแก้สมการหามุม A, B โดยใช้ข้อมูลจากโจทย์แล้วดูความเป็นไปได้ของมุมที่เกิดขึ้น แล้วจึงนำไปหาคำตอบ โดยใช้ $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$, $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

16 ตอบ ข้อ 4 $\frac{9}{16}$

วิธีทำ ใช้กฎของ sin ในการหา cos A

จะได้ว่า $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$

จะเห็นว่า $\hat{B} = 2\hat{A}$ ดังนั้น $\frac{\sin 2A}{\sin A} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A} = \frac{3}{2}$

$\therefore \cos A = \frac{3}{4}$ ดังนั้น $|\cos^2 A| = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^2\right| = \left|\frac{9}{16}\right| = \frac{9}{16}$

เทคนิค

ข้อนี้ใช้กฎ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; a ด้านตรงข้ามมุม A
b ด้านตรงข้ามมุม B
c ด้านตรงข้ามมุม C

เพื่อใช้หาความสัมพันธ์ของมุม A, B แล้วจะได้ค่า cos A ซึ่งเป็นคำตอบ

17 **ตอบ ข้อ 2** $\frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{-2}{3}$ จะได้ $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{-2}{3}$ ——❶

จาก $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ จะได้ $2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ——❷

เอาสมการ ❶ ÷ ❷ จะได้ $\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ โดยที่ $\frac{\alpha+\beta}{2} = -\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\alpha+\beta = \frac{-\pi}{3} \rightarrow -(\alpha+\beta) = -\alpha-\beta = -\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตรเพื่อสร้างรูปแบบสมการแล้วจึงแก้มุม $\alpha+\beta$

ใช้ $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$

18 **ตอบ ข้อ 4** 9

วิธีทำ ให้ $\tan^{-1}\sqrt{2} = \theta$ ดังนั้น $\tan\theta = \sqrt{2}$

และ $\sec^2 2\theta = 1 + \tan^2 2\theta$

$$\sec^2 2\theta = 1 + \left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1-\left(\sqrt{2}\right)^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1-2}\right)^2$$

$$= 1 + (-2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9$$

ดังนั้น ผลบวกคำตอบ คือ 9

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตร $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ และ $\tan^2 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ มาใช้เพื่อหาคำตอบ

19 ตอบ ข้อ 3 $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

วิธีทำ

$$\cos 2A + 3\cos 2B = -2$$
$$(2\cos^2 A - 1) + 3(2\cos^2 B - 1) = -2$$
$$2\cos^2 A - 1 + 6\cos^2 B - 3 = -2$$
$$2\cos^2 A + 6\cos^2 B = 2$$
$$\therefore \cos^2 A + 3\cos^2 B = 1$$

โดย $\cos A - \sqrt{2}\cos B = 0 \rightarrow \cos A = \sqrt{2}\cos B$

แทนค่า $(\sqrt{2}\cos B)^2 + 3\cos^2 B = 1$

$$2\cos^2 B + 3\cos^2 B = 1$$
$$\therefore 5\cos^2 B = 1 \rightarrow \cos B = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$; มุม B เป็นมุมแหลม $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $\cos A = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

หา sin A โดย $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\sin^2 A + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$
$$\therefore \sin A = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$; มุม A เป็นมุมแหลม $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

หา sin B โดย $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\sin^2 B + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1$$
$$\therefore \sin B = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$; มุม B เป็นมุมแหลม $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

เนื่องจากมุม $A + B + C = 180^\circ$ ดังนั้น $\cos C = \cos(180^\circ - A - B)$

$$= -\cos(A + B)$$

$\therefore -\cos(A + B) = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

ดังนั้น $5\cos C = 5\left(\frac{1}{5}\right)\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

เทคนิค

ให้จัดรูปของสมการที่โจทย์ให้มาและหาความสัมพันธ์ของสมการก็จะหาค่าของ sin และ cos ได้จากข้อมูลที่โจทย์ให้มา

20 **ตอบ ข้อ 4** $\frac{9}{4}$

วิธีทำ $\cos\frac{7\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3}-2\sin\frac{8\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}\left(-\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \frac{-\sqrt{3}}{2}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$

เทคนิค

ให้เช็ก Quadrant (Q) ก่อนแล้วค่อยแปลงค่าเป็นมุมเล็ก ซึ่งจะง่ายต่อการหาค่าโดย Q ที่เป็นบวกคือ

sin	All
tan	cos

21 **ตอบ ข้อ 1** ข้อ ก และ ข ถูก

วิธีทำ **ก.** $\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ $\therefore$ ข้อ ก ถูก

ข. $\cos\frac{\pi}{5} = \cos 2\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1-2\sin^2\frac{\pi}{10} = 1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ $\therefore$ ข้อ ข ถูก

เทคนิค

ข้อนี้ทั้งข้อ ก, ข ต้องพยายามแปลงโจทย์ให้เข้าฟอร์มสูตรเพื่อหาคำตอบ ต้องรู้สูตร $\sin(A+B)-\sin(A-B) = 2\cos A\sin B$, $\cos 2A = 1-2\sin^2 A$

22 **ตอบ ข้อ 2**

วิธีทำ $(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)^2 = (\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)$

$= (\sec^2\theta-\tan^2\theta)(\sec\theta+\tan\theta) = (\sec\theta+\tan\theta) = \frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

เทคนิค

ข้อนี้ใช้สูตร $\sec^2\theta-\tan^2\theta = 1$ มาใช้ในการแก้ แล้วจึงพยายามแปลงคำตอบให้เข้ากับตัวเลือก $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

23 ตอบ ข้อ 5 5

วิธีทำ จาก $f(2) = 3 \rightarrow 3 = a\sin 2 + 2b\cos 2 + 4$

$-1 = a\sin 2 + 2b\cos 2$ ——— ❶

$\therefore f(-2) = a\sin(-2) - 2b\cos(-2) + 4$

$= -a\sin 2 - 2b\cos 2 + 4$

$= -(a\sin 2 + 2b\cos 2) + 4 = -(-1) + 4 = 5$

เทคนิค

ข้อนี้จะเห็นว่าเป็นโจทย์ฟอร์มที่ไม่ต้องหาค่า sin, cos ก็สามารถหาคำตอบได้โดยการจัดรูปแบบให้เข้ากับข้อมูลโจทย์ที่ได้มา $\sin(-\theta) = \sin\theta$

24 ตอบ ข้อ 1 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

วิธีทำ ลองแทนมุมง่าย ๆ เช่น $\beta = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\tan\alpha = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$ $\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \frac{\cos\alpha}{\sin\beta + \cos\beta} = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

เทคนิค

ให้ทดลองแทนมุมที่เราสามารถรู้ค่าได้และตรวจสอบว่าถูกหรือไม่ หลังจากนั้นลองนำคำตอบที่ได้ไปแทนในสิ่งที่โจทย์ถาม เนื่องจากโจทย์เป็นโจทย์ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างโจทย์กับคำถาม

25 **ตอบ ข้อ 4** $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin 2\alpha \ \sin 2\beta = (2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\beta\cos\beta)$

$= (2\sin\alpha\sin\beta)(2\cos\alpha\cos\beta)$

$= [\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)][\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$= \left[\frac{3+4\sqrt{3}}{10}-\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\right]\left[\frac{3-4\sqrt{3}}{10}+\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right]$

$= \frac{12\sqrt{3}}{25}$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องจัดรูปแบบความสัมพันธ์ของโจทย์ให้เข้ากับข้อมูลที่ให้มา โดยการจัดให้เป็นรูปแบบสูตร $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

$\cos(A-B)-\cos(A+B) = 2\sin A\sin B$

26 **ตอบ ข้อ 1** $\frac{11}{32}$

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{1}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{5A}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{5A}{2}\right)\right]$

$= \frac{1}{2}(\cos 2A-\cos 3A)$

$= \frac{1}{2}[(2\cos^2 A-1)-(4\cos^3 A-3\cos A)]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(2\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\right)-\left(4\left(\frac{3}{4}\right)^3-3\left(\frac{3}{4}\right)\right)\right] = \frac{11}{32}$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องเอา $\frac{1}{2}$ คูณไปก่อนเพื่อจัดรูปเข้าสูตรแล้วจึงแทนค่าตามข้อมูลที่ให้มาเพื่อใช้หาคำตอบ สูตรที่ใช้คือ $\cos 2A = 2\cos^2 A-1$, $\cos 3A = 4\cos^3 A-3\cos A$

และ $\cos(A-B)-\cos(A+B) = 2\sin A\sin B$

27 ตอบ ข้อ 4 1

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0$ จัดรูปเป็น $\sin\alpha = 2\sin\beta$ ——❶

และยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\sin^2\alpha = 4\sin^2\beta$

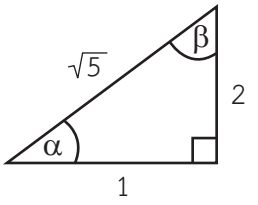
และจาก $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3 \rightarrow 3(1 - 2\sin^2\alpha) - 2(1 - 2\sin^2\beta) = -3$

$3 - 6\sin^2\alpha - 2 + 4\sin^2\beta = -3 \rightarrow 1 - 6\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = -3$

$-5\sin^2\alpha = -4 \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{5}$ ดังนั้น $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

เอาค่า $\sin\alpha$ ไปแทนในสมการ ❶ จะได้ $\sin\beta = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

จากข้อมูลจะสามารถหาความสัมพันธ์ได้ว่า $\alpha + \beta = 90°$

เนื่องจาก 

ซึ่งเป็น Δ มุมฉาก ดังนั้น $\sin(\alpha + \beta) = 1$

เทคนิค

จัดรูปสมการและตั้งเป็นสมการที่ ❶ เพื่อจัดอีกรูปและแทนสมการที่ 1 ลงในอีกสมการ เพื่อหาความสัมพันธ์ของมุม α และ β

28 ตอบ ข้อ 3 3

วิธีทำ จากสูตร $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$

จะได้ว่า $a = \frac{1 + \cos 80°}{2} + \frac{1 + \cos 40°}{2} - \frac{1 + \cos 20°}{2}$

$= \frac{1}{2}[1 + \cos 80° + 1 + \cos 40° - 1 - \cos 20°]$

$= \frac{1}{2}(1 + \cos 80° + \cos 40° - \cos 20°)$

$= \frac{1}{2}(1 + 2\cos 60°\cos 20° - \cos 20°)$

$= \frac{1}{2}\left(1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\cos 20° - \cos 20°\right)$

$= \frac{1}{2}(1)$

$= \frac{1}{2}$

และ $b = \left(\frac{1}{\tan 10^\circ} - \tan 10^\circ\right)\tan 20^\circ = \left(\frac{1-\tan^2 10^\circ}{\tan 10^\circ}\right)(\tan 20^\circ)$

เอา $\frac{2}{2}$ คูณจะได้ $2\left(\frac{1-\tan^2 10^\circ}{2\tan 10^\circ}\right)(\tan 20^\circ) = \left(\frac{2}{\tan 2(10^\circ)}\right)(\tan 20^\circ) = 2$

ดังนั้น $2a + b = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = 3$

เทคนิค

ข้อนี้หาค่า a, b จะต้องใช้เทคนิคการแปลงรูปแบบโจทย์ให้เข้ากับสูตร

$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ และ $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ เป็นต้น

$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}$

29 ตอบ ข้อ 1 1

วิธีทำ ปรับเป็น $8\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)$

$= 8\left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$= 8\sin^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{3\pi}{8}$

$= 2\left(2\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}\right)^2$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\pi}{8}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}\right)^2$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2$

$= 1$

เทคนิค

ข้อนี้จะสังเกตเห็นว่าสามารถปรับมุมบางมุมให้สอดคล้องกับรูปแบบโจทย์ได้คือ

$\cos\frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ เป็นต้น จะทำให้ง่ายต่อการหาคำตอบ

30 ตอบ ข้อ 2 -1

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin\theta \sec\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้เป็น $\sin\theta\,(-\text{cosec}\,\theta)$

$= \sin\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right) = -1$

เทคนิค

ข้อนี้จะเห็นว่าเราไม่จำเป็นจะต้องนำข้อมูล $\frac{1}{\sin\theta+1} - \frac{1}{\sin\theta-1} = 4$ มาใช้ในการหาคำตอบเลย เนื่องจากเราจะใช้หลัก $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\text{cosec}\,\theta$ แปลงรูปแบบเพื่อหาคำตอบได้เลย $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

31 ตอบ ข้อ 4 $\frac{39}{28}$

วิธีทำ จัดรูปข้อมูลเป็น $3\sin\theta - 4\sin^3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$

จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$

โดยที่ $\sec 2\theta + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \frac{1}{\cos 2\theta} + \sin\theta = \frac{1}{1-2\sin^2\theta} + \sin\theta$

$= \frac{1}{1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4} = \frac{39}{28}$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องจัดข้อมูลจากโจทย์เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปแทนค่าหาคำตอบจะเป็นวิธีที่ง่ายที่สุด ซึ่งต้องใช้สูตรมาช่วยด้วย $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

32 ตอบ ข้อ 1 $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

วิธีทำ ปรับเป็น $2\sin^2 x + \sin x + 1 = 2\sqrt{2\sin^2 x + \sin x}$

ลองให้ $a = \sqrt{2\sin^2 x + \sin x}$ เพื่อให้ง่ายต่อการมอง

$\therefore$ จะได้ $a^2 + 1 = 2a \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$

ดังนั้น $1 = \sqrt{2\sin^2 + \sin x}$ ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้างจะได้ $1 = \sin^2 x + \sin x$

$\therefore 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

ดังนั้น $\sin x = \frac{1}{2}, -1 \therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ และ $\frac{3\pi}{2}$ อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

เทคนิค

ข้อนี้เราจะใช้การสมมติตัวแปรให้ง่ายต่อการมองและแยกตัวประกอบจึงจะสามารถหามุมได้

33 ตอบ ข้อ 1 0.28

วิธีทำ จากโจทย์ $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{3}{4}$

ดังนั้น $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{16} \times \frac{16}{25} = 0.28$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องใช้สูตร $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ เพื่อปรับให้เข้ากับสิ่งที่โจทย์ให้มา จะสามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้น

$\arctan A = B, \tan B = A$

34 ตอบ ข้อ 3 $(-2, 2)$

วิธีทำ ปรับเป็น $\arctan(1+x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(1-x)$

เอา tan คูณทั้ง 2 ข้างจะได้ $1 + x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(1-x)\right)$

$$1 + x = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - (1-x)}{1+\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)(1-x)} \rightarrow 1 + x = \frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}$$

$$1 + x = \frac{x}{2-x} \rightarrow (1+x)(2-x) = x \rightarrow 2 + x - x^2 = x$$

$\therefore x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ จึงอยู่ในช่วง $(-2, 2)$

เทคนิค

ข้อนี้เราจะจัดรูปโดยการเอา tan คูณทั้ง 2 ข้างเพื่อปรับโจทย์ให้สามารถใช้สูตร

$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+(\tan A)(\tan B)}$ ได้ แล้วจึงหาค่า x ต่อไป

$\arctan \cdot \tan A = A \; ; \; x \in \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

35 ตอบ ข้อ 1 $\frac{-2x}{1+x^2}$

วิธีทำ สมมติให้ $A = \arctan x$ ดังนั้น $\tan A = x$

สรุปได้ว่า $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2A\right) = -\sin 2A = \frac{-2\tan A}{1+\tan^2 A}$

นั่นคือเท่ากับ $\frac{-2x}{1+x^2}$

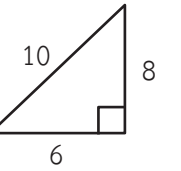
เทคนิค

ข้อนี้เราจะสมมติค่า arctan ก่อน แล้วจึงปรับเป็น tan เพื่อให้ง่ายต่อการมองและแทนค่าเพื่อหาคำตอบ

36 ตอบ ข้อ 2 90°

วิธีทำ จากโจทย์ $\frac{\sin A}{2} = \frac{3\sin B}{8} = \frac{3\sin C}{10}$ ลองเอา 3 หารเพื่อให้เข้ากฎของ sin

จะได้ $\frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{10}$



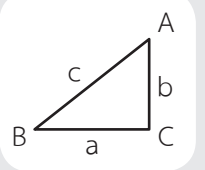
ดังนั้นด้าน a = 6 ด้าน b = 8 และด้าน c = 10

ดังนั้นจากข้อมูลจึงสามารถสร้างรูป Δ มุมฉากได้

โดยเข้าหลักพีทาโกรัส จึงสรุปได้ว่า มุมที่ใหญ่ที่สุดคือ มุม 90° นั่นเอง

เทคนิค

ข้อนี้เราปรับเข้ากฎของ sin จะเห็นว่าจะได้ด้านทั้ง 3 เข้าสู่กฎพีทาโกรัส จึงได้มุมที่ใหญ่ที่สุดคือ 90°



กฎของ sin $= \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$; a เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A

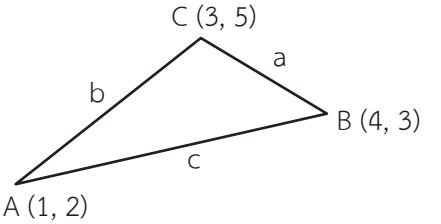
มุมภายใน $\Delta = 180^\circ$ b เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม B

c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม C

37 ตอบ ข้อ 4 $\left(\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}$ ดังนั้นเราจึงต้องหาค่า cos B ก่อน

เราจะวาดรูปได้เป็น



เราต้องหาค่า a, b, c โดยใช้สูตรคือ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ดังนั้น $a = \sqrt{(4-3)^2+(3-5)^2} = \sqrt{5}$

$b = \sqrt{(3-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{13}$

$c = \sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{10}$

เราจะใช้กฎของ cos ในการหาค่า cos B คือ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

ได้เป็น $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{13})^2}{2(\sqrt{5})(\sqrt{10})} = \frac{1}{\sqrt{50}}$

ดังนั้น $\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}}} = \left(\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{2}}$

เทคนิค

ข้อนี้ใช้กฎของ cos ในการแก้หา cos B โดย a, b, c ต้องใช้สูตรระยะห่างระหว่างจุด เพื่อใช้แทนค่าแล้วจึงเอาค่า cos B ไปแทนในโจทย์ต่อไป

สูตรหาระยะระหว่างจุด 2 จุด = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

สูตรมุมครึ่ง $\sin\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}$

กฎของ cos ; $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

38 ตอบ ข้อ 1 $2\cot^2\theta$

วิธีทำ ปรับเป็น $\dfrac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - 1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}}$

$$= \frac{2\sin\theta\cos^2\theta}{\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos^2\theta}{\sin\theta(1 - \cos^2\theta)}$$

$$= \frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= 2\cot^2\theta$$

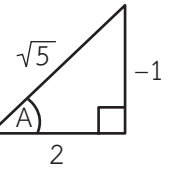
เทคนิค

ข้อนี้นำสูตรมาใช้การปรับรูปแบบโจทย์เพื่อให้สามารถหาคำตอบจากโจทย์ได้ง่ายมากขึ้น
สังเกต $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

39 ตอบ ข้อ 4 $\frac{-4}{3}$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = A$ ดังนั้น $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ จะเห็นว่ามุม A อยู่ใน Q_4

เราจึงรู้ว่า $\tan A = \frac{-1}{2}$



ดังนั้น $\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \sin^2 A}$

$$= \frac{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-4}{3}$$

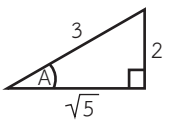
เทคนิค

ข้อนี้ต้องสมมติค่า arcsin ให้เป็นตัวแปรก่อน แล้วจึงได้ค่า sin A หลังจากนั้นจึงปรับเพื่อหาค่า tan A แล้วจึงแทนค่าเพื่อหาคำตอบ

40 ตอบ ข้อ 4 $\frac{2}{27}\left(7+2\sqrt{10}\right)$

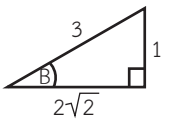
วิธีทำ หา $(fog)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\arcsin\frac{2}{3} + 2\arcsin\frac{1}{3}\right)$

สมมติให้ $\arcsin\frac{2}{3} = A$ ดังนั้น $\sin A = \frac{2}{3}$



$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\arcsin\frac{1}{3} = B$ ดังนั้น $\sin B = \frac{1}{3}$



$\therefore \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $= \sin(A + 2B)$

$= \sin A\cos 2B + \cos A\sin 2B$

$= \left(\frac{2}{3}\right)(1 - 2\sin^2 B) + \cos A\,(2\sin B\cos B)$

$= \frac{2}{3}\left(1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \frac{\sqrt{5}}{3}\left(2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{9}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$

$= \frac{14}{27} + \frac{4\sqrt{10}}{27}$

$= \frac{2}{27}\left(7 + 2\sqrt{10}\right)$

เทคนิค

ข้อนี้ลองสมมติ arcsin เป็นตัวแปรให้ง่ายต่อการมอง แล้วจึงหาค่า sin และ cos แล้วจึงแปลง sin (A + B) = sin A cos B + cos A sin B หลังจากนั้นจึงเอาค่า sin และ cos ที่หาได้ไปแทนในโจทย์ sin (A + B) เพื่อหาคำตอบ

41 ตอบ ข้อ 4 $\frac{33}{65}$

วิธีทำ **1.** เขียนค่า $\cos C$ ในรูปของมุม A กับ B

เนื่องจากมุม A, B, C เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม ดังนั้น $C = 180^\circ - (A + B)$

หาค่า $\cos C$

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos(180^\circ - (A + B)) \\ &= \cos(180^\circ)\cos(A + B) + \sin(180^\circ)\sin(A + B) \\ &= (-1)\cos(A + B) + (0)\sin(A + B) \\ &= -\cos(A + B) + 0 \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\ &= \sin A \sin B - \cos A \cos B\end{aligned}$$

2. คำนวณค่า $\cos C$

แทนค่า $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ ลงในสมการด้านบน

จะได้ $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{33}{65}\end{aligned}$$

เทคนิค

เนื่องจากเราไม่รู้ว่า Δ ที่โจทย์บอกเป็นแบบไหน แต่เราทราบว่ามุมภายใน $\Delta = 180^\circ$ เราจึงรู้ว่า $\cos C = \cos(180^\circ - (A + B))$

เมื่อเรารู้ค่า $\cos C$ เราก็จะหาคำตอบได้

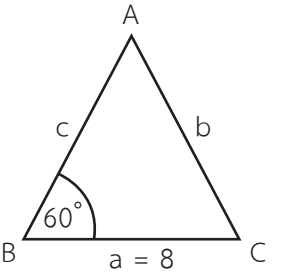
สูตร $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

42 ตอบ ข้อ 3 36

วิธีทำ **1.** วิเคราะห์ว่าควรใช้กฎของไซน์หรือโคไซน์

โจทย์บอกข้อมูลมุม B และความยาวของด้านตรงข้ามมุม B ซึ่งชี้ให้เห็นว่าควรใช้กฎของโคไซน์ที่มุม B

$b^2 = a^2 + c^2 - 2(a)(c)\cos B$



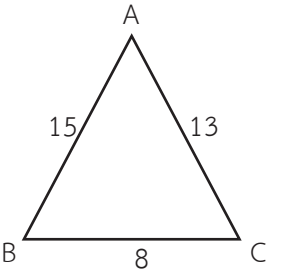
2. แทนค่า $B = 60^\circ$, $a = 8$ และ $c = b + 2$ ลงในสมการที่ได้

$b^2 = (8^2) + (b + 2)^2 - 2(8)(b + 2)\cos 60^\circ$

$b^2 = 64 + b^2 - 4b + 4 - 16$

$4b = 52$

$b = 13$



3. แทนค่า b เพื่อหาค่า c และ a

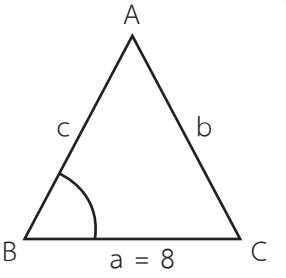
ซึ่งจะได้ $b = 13$, $c = b + 2 = 15$ และจาก $a = 8$

$\therefore$ รวมกันได้ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยมเป็น 36

เทคนิค

ใช้กฎของโคไซน์

$b^2 = a^2 + c^2 - 2(a)(c)\cos B$



ตะลุยโจทย์

คณิตศาสตร์

เตรียมสอบ มัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

อัดแน่นด้วย
ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลายกว่า 500 ข้อ
พร้อมเฉลยและเทคนิคการทำข้อสอบ
ให้ได้คะแนนเต็ม!

เจาะลึกและติวเข้ม!

แนวข้อสอบ PAT & วิชาสามัญ
เพื่อการสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกรูปแบบ

เนื้อหาเข้มข้น อ่านเข้าใจง่าย! เล่มเดียวเนื้อหาครบ!

SMART++
คู่มือเตรียมตัวสอบ

O-NET GAT PAT วิชาสามัญ
คุณภาพระดับพรีเมียม
การันตีเนื้อหาแม่นยำ **SURE 100%**

ISBN
คู่มือเรียน-สอบ
ราคา บาท
9 786167 972169