

SMART⁺⁺

ตะลุยโจทย์

คณิตศาสตร์



มัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

เจาะลึกและตัวเข้ม!

แนวข้อสอบ PAT & วิชาสามัญ
เพื่อการสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกรูปแบบ

อัดแน่นด้วยข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลายกว่า 500 ข้อ
พร้อมเฉลยและเทคนิคการทำข้อสอบให้ได้คะแนนเต็ม!

เนื้อหาเข้มข้น อ่านเข้าใจง่าย! เล่มเดียวเนื้อหาครบ!



ตัวต่อ ANN
ทวินันท์ อยู่สุขนร

ตะลุยกุญแจทฤษฎี คณิตศาสตร์
เตรียมสอบมัธยมปลาย
PAT + วิชาสามัญ

ทะลุจอทย์ คณิตศาสตร์
เตรียมสอบมัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

ผู้เขียน : ทวิพันธ์ อยู่สุนทร

ราคา 000 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 : มีนาคม 2560

สงวนลิขสิทธิ์โดย : บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด

จัดพิมพ์โดย : **บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด**

SM8RT**

2387 อาคารรวมทุนพัฒนา ชั้น 3 ถนนเพชรบุรีตัดใหม่

แขวงบางกะปิ เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310

โทร. 0-2318-4818 (10 คู่สาย)

แฟกซ์ : 0-2318-4809

E-mail : SM8RTINTEL@gmail.com

จัดจำหน่ายโดย : **บริษัท ซีเอ็ดดูเคชั่น จำกัด (มหาชน)**

เลขที่ 1858/87-90 ถนนบางนา-ตราด

แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพฯ 10260

โทรศัพท์ 0-2739-8000

โทรสาร 0-2751-5999

<http://www.se-ed.com>

พิมพ์ที่ : **บริษัท แอคทีฟ พรินท์ จำกัด**

โทร. 0-2530-4114 (8 คู่สาย)

ข้อมูลทางบรรณานุกรมหอสมุดแห่งชาติ

.

ข้อสอบคณิตศาสตร์.-- กรุงเทพฯ : สมาร์ท อินเทลลิเจนท์, 2560.

หน้า.

1. .

ISBN 978-616-

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นมาในรูปแบบของตะลุยโจทย์ที่ครอบคลุมข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ทั้งพื้นฐานและเพิ่มเติมที่น้อง ๆ ใช้สอบกันทั้งโจทย์ O-NET, วิชาสามัญ, PAT โดยโจทย์แต่ละข้อจะมีระดับความยากง่ายคละกัน ในส่วนของเฉลยพี่แอนได้ใส่เทคนิคการคิดให้ทุกข้อด้วย ว่าข้อนั้นต้องมีความรู้เรื่องอะไรบ้าง ถ้าเรื่องไหนที่น้องไม่เข้าใจก็จะได้กลับไปทบทวนได้ถูกจุด ที่สำคัญอยู่ที่ความตั้งใจและฝึกทำโจทย์เยอะ ๆ อยู่ในห้องสอบน้องจะทำโจทย์ได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง

หนังสือเล่มนี้เกิดขึ้นได้เนื่องจากมีบุคคลหลายท่านอยู่เบื้องหลัง ก่อนอื่นต้องขอขอบคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ที่เลี้ยงดูและให้การศึกษาเป็นอย่างดี ขอขอบคุณคุณครู อาจารย์ คณิตศาสตร์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาจนพี่ได้นำความรู้สิ่งที่ได้เรียนมา มาถ่ายทอดให้น้อง ๆ ได้ ขอขอบคุณพี่บอล บิ๊ก น้องไอซ์ ทีมเตอร์ทุกคนที่ช่วยตรวจทานและเรียบเรียงแก้ไขให้สมบูรณ์มากขึ้น ขอขอบคุณ บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด และทีมงานที่ไว้วางใจให้พี่ได้ทำหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา

สุดท้ายนี้พี่ยินดีรับฟังข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะ หรือถ้าน้อง ๆ มีคำถามใด ๆ สงสัย ส่งอีเมลมาหาพี่แอนได้เลยที่ tawinan_ann@hotmail.com และ Inbox เข้ามาคุยที่ facebook See U Bright

ทวินันท์ อยู่สุนทร
ทีมเตอร์แอน

สารบัญ

คำนำ

หน้า 3

สารบัญ

4

ตะลุยโจทย์ คณิตศาสตร์ เตรียมสอบมัธยมปลาย PAT + วิชาสามัญ

ข้อสอบพร้อมเฉลย

| | |
|---|-----|
| บทที่ 1 : ตรีโกณมิติ | 5 |
| บทที่ 2 : ภาคตัดกรวย | 41 |
| บทที่ 3 : อนุพันธ์ของฟังก์ชันและอินทิเกรต | 71 |
| บทที่ 4 : ลำดับและอนุกรม | 103 |
| บทที่ 5 : กำหนดการเชิงเส้น | 137 |
| บทที่ 6 : ลิมิตและความต่อเนื่อง | 149 |
| บทที่ 8 : การนับและความน่าจะเป็น | 187 |
| บทที่ 9 : ตรรกศาสตร์ | 219 |
| บทที่ 10 : สถิติ | 237 |
| บทที่ 11 : ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน | 285 |
| บทที่ 12 : จำนวนเชิงซ้อน | 295 |
| บทที่ 13 : จำนวนจริง | 315 |
| บทที่ 14 : เมทริกซ์ | 351 |
| บทที่ 15 : เวกเตอร์ | 377 |
| บทที่ 16 : ทฤษฎีจำนวน | 401 |
| บทที่ 17 : เซต | 423 |
| เกี่ยวกับผู้เขียน | 443 |

บทที่ 1

ข้อสอบ + เฉลย

ตรีโกณมิติ

★ ข้อสอบ ตรีโกณมิติ ★

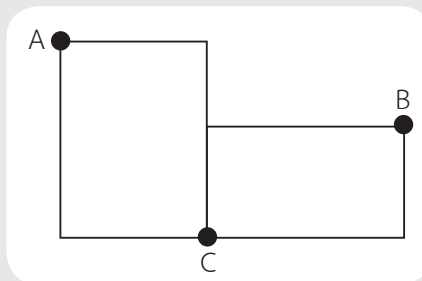
- 1 ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 2 หน่วย แล้วด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย
- 2) $\frac{4}{3}$ หน่วย
- 3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ หน่วย
- 4) $\frac{3}{2}$ หน่วย
- 5) $\frac{3}{4}$ หน่วย

- 2 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 480 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 60% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่ง แล้วเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ยาวกี่เซนติเมตร

- 1) 120 เซนติเมตร
- 2) 40 เซนติเมตร
- 3) $32 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร
- 4) $48 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร
- 5) $64 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

- 3 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูปมีขนาดเท่ากัน โดยมีเส้นทแยงมุมเป็นสามเท่าของด้านกว้าง ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองมาวางต่อกันดังรูป จุด A และจุด B อยู่ห่างกันเป็นระยะกี่เท่าของด้านกว้าง



- 1) 1.5
- 2) 3
- 3) $\sqrt{2}$
- 4) $3\sqrt{2}$
- 5) 4.5

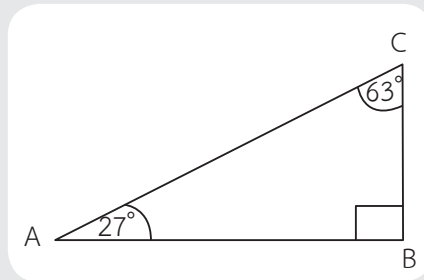
- 4 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{3}{4}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ตารางหน่วย 2) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ตารางหน่วย 3) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ตารางหน่วย
4) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ ตารางหน่วย 5) $\frac{7\sqrt{7}}{8}$ ตารางหน่วย

- 5 กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 24 ตารางหน่วย และ $\tan \hat{ABD} = \frac{1}{6}$ ถ้า AE ตั้งฉากกับ BD และ AE ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\sqrt{37}}{6}$ หน่วย 2) $\frac{12}{\sqrt{37}}$ หน่วย 3) $\frac{2\sqrt{37}}{6}$ หน่วย
4) $\frac{3\sqrt{37}}{12}$ หน่วย 5) $\frac{4\sqrt{37}}{12}$ หน่วย

- 6 จากรูป



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- 1) $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$
2) $\sin 27^\circ = \cos 27^\circ$
3) $\cos 27^\circ = \tan 27^\circ$
4) $\tan 27^\circ = \cos 63^\circ$
5) $\cos 90^\circ = \sin 90^\circ$

7 ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

- 1) $\sin 30^\circ > \sin 45^\circ$
- 2) $\cos 30^\circ > \cos 45^\circ$
- 3) $\tan 45^\circ > \cot 45^\circ$
- 4) $\tan 60^\circ > \cot 60^\circ$
- 5) $\sin 37^\circ > \cos 53^\circ$

8 โดยใช้ตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่าง ๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

| θ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ |
|------------|---------------|---------------|
| 72° | 0.951 | 0.309 |
| 73° | 0.956 | 0.292 |
| 74° | 0.961 | 0.276 |
| 75° | 0.966 | 0.259 |

มุมภายในที่มีขนาดใหญ่เป็นอันดับ 2 ของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 7, 24 และ 25 หน่วย มีขนาดใกล้เคียงกับข้อใดมากที่สุด

- 1) 72°
- 2) 73°
- 3) 74°
- 4) 75°
- 5) ไม่มีข้อใดถูกต้อง

9 มุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากับ 30° องศา ถ้าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้ ยาว $3 - \sqrt{3}$ ฟุตแล้ว ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองมีความยาวเท่าใด

- 1) $2 - \sqrt{3}$ ฟุต
- 2) $2 + \sqrt{3}$ ฟุต
- 3) $2\sqrt{3} - 3$ ฟุต
- 4) $2\sqrt{3} + 3$ ฟุต
- 5) $3\sqrt{3} + 3$ ฟุต

10 กล้องวงจรปิดซึ่งถูกติดตั้งอยู่สูงจากพื้นถนน 3 เมตร สามารถจับภาพได้ต่ำที่สุดที่มุมก้ม 45° และสูงที่สุดที่มุมก้ม 30° ระยะทางบนพื้นถนนในแนวกล้องที่กล้องนี้สามารถจับได้คือเท่าใด (กำหนด $\sqrt{3} \approx 1.73$)

- 1) 1.00 เมตร 2) 1.46 เมตร 3) 2.19 เมตร
4) 3.46 เมตร 5) 4.14 เมตร

11 $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $-\frac{1}{7}$ 2) $-\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{7}$ 5) 9

12 กำหนดให้ ABC เป็น Δ หน้าที่จั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$ ถ้ามุม $A = 150^\circ$ และด้าน BC ยาวเท่ากับ 16 หน่วย แล้ว 2 เท่าของพื้นที่ ΔABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{64}{3}$ ตร.หน่วย
2) $128(2 - \sqrt{3})$ ตร.หน่วย
3) $64(3 - \sqrt{2})$ ตร.หน่วย
4) $64(2 - \sqrt{3})$ ตร.หน่วย
5) $128(2 + \sqrt{3})$ ตร.หน่วย

13 กำหนดให้ ABC เป็นรูป Δ ซึ่งมีด้าน AB และ AC ยาวเท่ากับ 3 หน่วยและ 5 หน่วยตามลำดับ ถ้า $\arccos\left(-\frac{1}{15}\right) = B + C$ แล้วความยาวรอบรูป ΔABC คือข้อใด

- 1) $8 + 4\sqrt{2}$ หน่วย
2) $4 + 4\sqrt{2}$ หน่วย
3) $8 + 4\sqrt{5}$ หน่วย
4) $4 + 5\sqrt{2}$ หน่วย
5) $8 + 5\sqrt{3}$ หน่วย

14 ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $2\arcsin(x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 6 5) 8

15 กำหนดให้ ABC เป็นรูป Δ ที่มีมุม \hat{C} เป็นมุมฉาก และ $\hat{A} \leq \hat{B}$ ถ้า $(\cos 2A + \cos B)^2 + (\sin 2A + \sin B)^2 = 3$ แล้ว $\tan^4 3A$ มีค่าเท่ากับ

- 1) 81 2) 1 3) $\sqrt{3}$ 4) 16 5) $\frac{1}{9}$

16 กำหนดให้ a และ b เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A และมุม B ของรูป ΔABC ตามลำดับ ถ้า $2b = 3a$ และ $\hat{B} = 2\hat{A}$ แล้ว $|\cos^2 A|$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{4}{9}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{9}{16}$ 5) $\frac{12}{25}$

17 กำหนดให้ $\alpha, \beta \in [-\pi, 0]$ ถ้า $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{-2}{3}$ และ $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ แล้ว $-\alpha - \beta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{2\pi}{3}$ 4) $\frac{4\pi}{3}$ 5) $\frac{5\pi}{3}$

18 ผลบวกของ $\sec^2(2\tan^{-1}\sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1) 2 2) 3 3) 8 4) 9 5) 16

19 กำหนดให้รูป ΔABC มีมุม A, B เป็นมุมแหลม ถ้า $\cos 2A + 3\cos 2B = -2$ และ $\cos A - \sqrt{2}\cos B = 0$ แล้ว $5\cos C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 2) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
 3) $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 4) $\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
 5) $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

20 ค่าของ $\cos \frac{7\pi}{6} \left(\sin \frac{5\pi}{3} - 2 \sin \frac{8\pi}{3} \right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) $-\frac{3}{4}$ 2) $-\frac{9}{4}$ 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{9}{4}$ 5) $\frac{6}{13}$

21 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

ข. $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (ให้ $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$)

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- 1) ข้อ ก และ ข ถูก
- 2) ข้อ ก ถูก ข ผิด
- 3) ข้อ ก ผิด ข ถูก
- 4) ข้อ ก และ ข ผิด
- 5) ไม่สามารถสรุปได้

22 ถ้า θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)^2$ มีค่าเท่าใด

- 1) $\frac{1-\sin \theta}{\cos \theta}$
- 2) $\frac{1+\sin \theta}{\cos \theta}$
- 3) $\frac{1-\cos \theta}{\sin \theta}$
- 4) $\frac{1+\cos \theta}{\sin \theta}$
- 5) ไม่มีข้อถูก

23 ให้ a, b เป็นค่าคงที่ และ $f(x) = a \sin x + b x \cos x + x^2$ สำหรับทุกค่า $x \in \mathbb{R}$
ถ้า $f(2) = 3$ แล้ว $f(-2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -3
- 2) -1
- 3) 1
- 4) 3
- 5) 5

24 กำหนดให้ $\tan \alpha = \frac{\sin \beta - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \beta}$ แล้ว $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta + \cos \beta}$ เท่ากับข้อใด

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2) 1
- 3) $\sqrt{2}$
- 4) $\sqrt{3}$
- 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

25 กำหนดให้ $\cos(\alpha + \beta) = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$ แล้ว $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$ จงหาค่า $\sin 2\alpha \sin 2\beta$

1) $\frac{-12\sqrt{3}}{25}$

2) $\frac{-6\sqrt{3}}{25}$

3) $\frac{6\sqrt{3}}{25}$

4) $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

5) $\frac{-18\sqrt{3}}{25}$

26 ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) $\frac{11}{32}$

2) $\frac{11}{16}$

3) $\frac{9}{16}$

4) $\frac{9}{12}$

5) $\frac{9}{32}$

27 ถ้า $3 \cos 2\alpha - 2 \cos 2\beta = -3$ และ $\sin \alpha - 2 \sin \beta = 0$ โดยที่ $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว $\sin(\alpha + \beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 0

2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$

4) 1

5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28 ให้ $a = \cos^2 40^\circ + \cos^2 20^\circ - \cos^2 10^\circ$ และ $b = (\cot 10^\circ - \tan 10^\circ) \tan 20^\circ$ จงหา $2a + b$

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

5) 5

29 จงหาค่าของ $8 \left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right)$

1) 1

2) 2

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sqrt{3}$

5) -1

30 ถ้า $\frac{1}{\sin \theta + 1} - \frac{1}{\sin \theta - 1} = 4$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\sin \theta \sec \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) -2

2) -1

3) 0

4) 1

5) 2

31 ให้ $\sin 3\theta + \sin \theta = 1 - 4 \sin^3 \theta$ แล้ว $\sec 2\theta + \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$ มีค่าเท่าใด

1) $\frac{7}{8}$

2) $\frac{9}{8}$

3) $\frac{25}{28}$

4) $\frac{39}{28}$

5) $\frac{42}{35}$

32 จำนวนจริง x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$2\sin^2 x + 1 = -\sin x + 2\sqrt{2\sin^2 x + \sin x} \text{ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้}$$

- 1) $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ 2) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 3) $[\pi, 2\pi]$
 4) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup [2\pi]$ 5) ไม่มีข้อใดถูก

33 ให้ $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ แล้ว $\cos 2\theta$ เท่ากับข้อใด

- 1) 0.28 2) 0.48 3) 0.56 4) 0.96 5) 1

34 เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

- 1) $(-4, 0)$ 2) $(-3, 1)$ 3) $(-2, 2)$
 4) $(-1, 3)$ 5) $(0, 3)$

35 ค่าของ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\arctan x\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{-2x}{1+x^2}$ 2) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ 3) $\frac{2x}{1-x^2}$
 4) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 5) $\frac{-2x}{1-x^2}$

36 ในรูป $\triangle ABC$ ถ้า $\frac{\sin A}{2} = \frac{3\sin B}{8} = \frac{3\sin C}{10}$ แล้วมุมที่ใหญ่ที่สุดทางกึ่งศา

- 1) 75° 2) 90° 3) 120° 4) 135° 5) 150°

37 ถ้า $A(1, 2)$, $B(4, 3)$ และ $C(3, 5)$ เป็นจุดยอดของ $\triangle ABC$ แล้ว $\sin \frac{B}{2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{50}-1}{\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$ 2) $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{50}+1}{\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$ 3) $\left(\frac{\sqrt{50}+1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$
 4) $\left(\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$ 5) ไม่มีข้อถูก

38 $\frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 1}{\tan \theta - \sin \theta \cos \theta}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- 1) $2 \cot^2 \theta$
- 2) $2 \cot \theta$
- 3) $2 \cot^2 \theta \sec^2 \theta$
- 4) $2 \cos \theta \operatorname{cosec} \theta$
- 5) $2 \operatorname{cosec}^2 \theta$

39 ค่าของ $\tan \left(2 \arcsin \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \right) \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) -1
- 2) 1
- 3) $\frac{4}{3}$
- 4) $-\frac{4}{3}$
- 5) $-\frac{1}{2}$

40 ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2 \arcsin x$ แล้วค่าของ $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{4}{9}$
- 2) $\frac{2}{9}(1 + \sqrt{8})$
- 3) $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}$
- 4) $\frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$
- 5) $5\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{3}$

41 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{4}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ ค่าของ $\cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) $\frac{16}{65}$
- 2) $-\frac{16}{65}$
- 3) $\frac{48}{65}$
- 4) $\frac{33}{65}$
- 5) $-\frac{33}{65}$

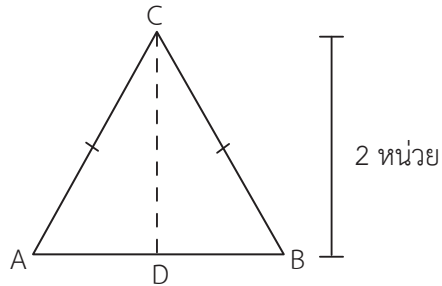
42 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ ถ้ามุม B เท่ากับ 60° a = 8 และ $c - b = 2$ แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1) 14
- 2) 16
- 3) 36
- 4) 45
- 5) 48

★ เฉลยข้อสอบ ตรีโกณมิติ ★

1 ตอบ ข้อ 3 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยม ACD



$$\begin{aligned}(AC)^2 &= (AD)^2 + (CD)^2 \\&= \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2^2 \\&= \frac{(AC)^2}{4} + 4\end{aligned}$$

$$\frac{3(AC)^2}{4} = 4$$

$$(AC)^2 = \frac{16}{3}$$

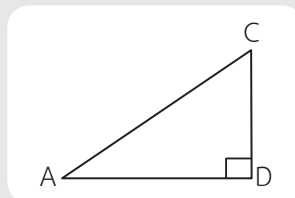
$$AC = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } AC &= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\&= \frac{4\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

เทคนิค

Δ ด้านเท่า ด้านทุกด้าน มุมทุกมุมมีขนาดเท่ากัน

สูตรพีทาโกรัส



$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

2 ตอบ ข้อ 5 $64 + 8\sqrt{34}$

วิธีทำ จากสูตรพื้นที่สามเหลี่ยมมุมฉาก $= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

$$480 = \frac{1}{2}(x)(0.60x)$$

$$\frac{960}{0.60} = x^2$$

$$1,600 = x^2$$

$$x = 40$$

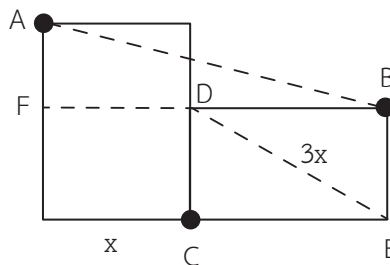
และความยาวด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งคือ $0.60x = 0.60 \times 40 = 24$ จะได้ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเป็น $8\sqrt{34} = 64 + 8\sqrt{34}$ เซนติเมตร

เทคนิค

ให้ความยาวที่โจทย์ให้มาคิดเป็นอัตราส่วนเพื่อหาด้านใดด้านหนึ่งและจะได้คำตอบจากการคูณอัตราส่วนเพื่อหาอีกด้านหนึ่งและจะสามารถหาค่าได้

$$\text{สูตร พื้นที่ } \Delta = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

3 ตอบ ข้อ 4 $3\sqrt{2}$



พิจารณาสามเหลี่ยม BDE

เส้นตรง $BD = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = x\sqrt{8}$ และเส้นตรง $DF = x$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABF

เส้นตรง $BF = x\sqrt{8} + x = x(\sqrt{8} + 1)$ และเส้นตรง $AF = x\sqrt{8} - x = x(\sqrt{8} - 1)$

จากสามเหลี่ยมพีทาโกรัส

$$AB^2 = BF^2 + AF^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{เส้นตรง } AB &= \sqrt{(x(\sqrt{8} + 1))^2 + (x(\sqrt{8} - 1))^2} \\
 &= \sqrt{x^2(8 + 2\sqrt{8} + 1) + x^2(8 - 2\sqrt{8} + 1)} \\
 &= x\sqrt{18} \\
 &= 3\sqrt{2}x
 \end{aligned}$$

ดังนั้น เส้นตรง AB มีความยาวเป็น $3\sqrt{2}$ เท่าของด้านกว้าง

เทคนิค

ให้กำหนดเส้นทแยงมุมเพื่อนำมาหาด้านที่เราต้องการจาก Δ พิกทอรัส วาดเส้นทแยงมุมและลองกำหนดค่าเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ

4 ตอบ ข้อ 2 $\frac{\sqrt{7}}{6}$

วิธีทำ

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

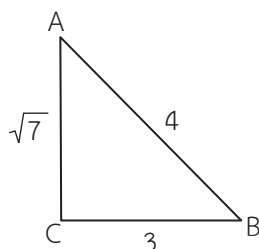
$$4^2 = (AC)^2 + 3^2$$

$$(AC)^2 = 7$$

$$AC = \sqrt{7}$$

ถ้า BC ยาว 3 หน่วย AC ยาว $\sqrt{7}$ หน่วย

ถ้า BC ยาว 1 หน่วย AC ยาว $\frac{\sqrt{7}}{3}$ หน่วย



ดังนั้น พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ BC ยาว 1 หน่วย $= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{7}}{6}$ ตารางหน่วย

เทคนิค

เรารู้ว่ามุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{3}{4}$

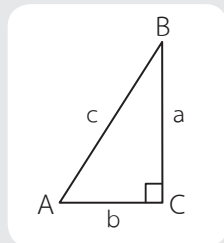
เราสามารถหาค่า AC ได้จากพีทาโกรัส

ทำให้เรารู้ได้ว่า AC ยาว $\sqrt{7}$ หน่วย

เมื่อโจทย์กำหนดให้ BC เป็น 1 จึงนำไปทำเป็นอัตราส่วน

เมื่อ BC เป็น 1; $AC = \frac{\sqrt{7}}{3}$

จึงนำไปหาพื้นที่ได้ $\frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$



5 ตอบ ข้อ 2 $\frac{12}{\sqrt{37}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สี่เหลี่ยม } ABCD &= \text{กว้าง} \times \text{ยาว} \\ 24 &= xy \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan \hat{ABC} = \frac{1}{6}$$

จากรูปสามเหลี่ยม ABD จะได้

$$\begin{aligned}\tan \hat{ABC} &= \frac{x}{y} \\ \frac{1}{6} &= \frac{x}{y} \\ y &= 6x\end{aligned}$$

แทน $y = 6x$ ใน ① จะได้

$$\begin{aligned}24 &= 6x^2 \\ x^2 &= 4 \\ x &= 2\end{aligned}$$

เนื่องจาก AE ตั้งฉากกับ BD ที่จุด E จากรูปสามเหลี่ยม ABD

$$\begin{aligned}BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ &= 12^2 + 2^2 \\ &= 144 + 4 \\ &= 148\end{aligned}$$

$$BD = \sqrt{148}$$

$$\begin{aligned}\text{เนื่องจาก พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABD} &= \frac{1}{2} \times AD \times AB \\ &= \frac{1}{2} \times BD \times AE\end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } AD \times AB = BD \times AE$$

$$2 \times 12 = \sqrt{148} \times AE$$

$$AE = \frac{2 \times 12}{\sqrt{148}} = \frac{12}{\sqrt{37}}$$

เทคนิค

ให้หาพื้นที่ของ ๒ เพื่อแทนในสมการ $\tan \theta = \frac{\text{ข้ามมุม}}{\text{ชิดมุม}}$ และแทนค่า $\tan \theta$ เป็นสมการ และได้

2 สมการ 2 ตัวแปรก็จะหาค่ากว้าง ยาว ของ □ ได้ และหลังจากนั้นค่อยหาความยาว AE

6 ตอบ ข้อ 1 $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$

วิธีทำ $\sin 27^\circ = \frac{BC}{AC}$ และ $\cos 63^\circ = \frac{BC}{AC}$

แสดงว่า $\sin 27^\circ = \cos 63^\circ$

เทคนิค

สูตรค่าตรีโกณมิติพื้นฐาน $\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

$\tan \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

7 ตอบ ข้อ 1 $\sin 30^\circ > \sin 45^\circ$

| อัตราส่วน ตรีโกณมิติ \ θ | 30° | 45° | 60° |
|------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\sin \theta$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \theta$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan \theta$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\cot \theta$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |

เทคนิค

ต้องทราบค่าพื้นฐานของ $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ ของมุม 30° , 45° , 60°

8 ตอบ ข้อ 3 74°

วิธีทำ โดยมุมที่ใหญ่เป็นอันดับ 2 คือ มุมที่มีค่าระหว่างมุมสั้นที่สุดและมุม 90°

$$\cos x = \frac{7}{25} = 0.280 \approx 0.276 \text{ เพราะฉะนั้น } x = 74^\circ$$

นั่นคือ มุมภายในที่ใหญ่เป็นอันดับ 2 มีค่าประมาณ 74 องศา

เทคนิค

พิจารณา 7, 24, 25 เป็น Δ มุมฉาก โดยถ้าต้องการหามุมที่กว้างที่สุดต้องหาค่าที่มีน้อยที่สุด คือ $\frac{7}{25}$ โดยการใช้ \cos เพื่อหาคำตอบ

9 ตอบ ข้อ 3 $2\sqrt{3} - 3$

วิธีทำ ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองคือ ด้านตรงข้ามมุม 60° ให้ยาวเป็น x

ดังนั้น ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ $\frac{x}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}x}{3}$

ด้านที่สั้นที่สุดยาวเท่ากับ $\frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}x}{3}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 3 - \sqrt{3} &= \frac{\sqrt{3}x}{3} + x + \frac{2\sqrt{3}x}{3} \\ &= x(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

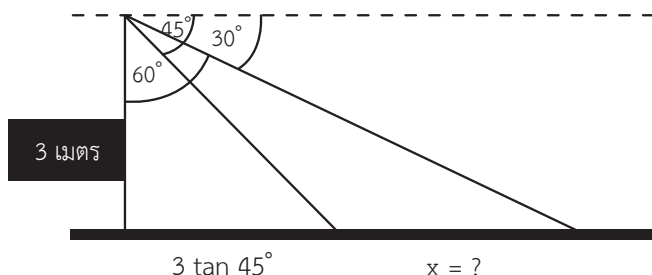
$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } x &= \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{3} - 3 \end{aligned}$$

เทคนิค

ให้เทียบอัตราส่วนโดยใส่ตรีโกณมิติเข้ามาช่วย
ในเรื่องของสมบัติ $\cos \theta$ และการหาค่า $\tan \theta$

10 ตอบ ข้อ 3 2.19

วิธีทำ จากโจทย์ วาดรูปได้กราฟดังนี้



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 3 \tan 60^\circ - 3 \tan 45^\circ &= 3\sqrt{3} - 3 \\ &\approx 3 \times 1.732 - 3 = 2.19 \end{aligned}$$

เทคนิค

ให้นำข้อความที่ได้มาวาดเป็นรูป เพื่อให้ง่ายต่อการมองรูปและการคิด โดยให้ใช้สมบัติของ ตรีโกณมิติ และ Δ คล้ายมา เพื่อหาคำตอบ

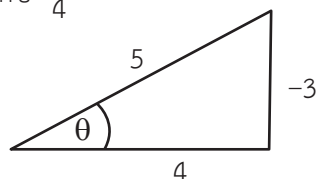
11 ตอบ ข้อ 4 $\frac{1}{7}$

$$\text{วิธีทำ } \tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right)}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right)}$$

พิจารณา $\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right) = \theta$ ซึ่งเป็นมุมที่ \sin แล้วเป็นลบ ดังนั้นจึงอยู่ Q_3 หรือ Q_4 โดยในขณะที่เรารู้ของ \arcsin คือ Q_1 หรือ Q_4 ดังนั้นมุม θ จึงเป็นมุมใน Q_4

$\therefore \tan \theta$ จึงเป็นค่าลบ โดยจะเห็นว่า $\tan \theta$ จะเท่ากับ $\frac{-3}{4}$

$$\text{ดังนั้น } \tan\left(\arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right) = \frac{-3}{4}$$



$$\text{แทนค่าจะได้ } \frac{1 + \left(\frac{-3}{4}\right)}{1 - \left(\frac{-3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7} \quad \therefore \tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right] = \frac{1}{7}$$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตร $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ มาใช้พิจารณา

และถ้าสูตรมุมผลต่างจะเป็น $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

หลังจากนั้นจึงค่อยตรวจสอบค่ามุมที่เป็นไปได้ในแต่ละ Q แล้วจึงแทนค่า

โดยมุมที่เป็นบวกแต่ละ Q คือ

| | |
|-----|-----|
| sin | All |
| tan | cos |

12 ตอบ ข้อ 2 $128(2 - \sqrt{3})$

วิธีทำ ลองวาดรูปจากข้อมูลที่โจทย์ให้มา จะได้ว่ามุม C และ B จะเท่ากับ $\frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$
แล้วลากเส้น AD ลงมาตั้งฉากเส้น BC

โดยที่ $\tan C = \frac{AD}{CD}$ ดังนั้น $\tan 15^\circ = \frac{AD}{8}$

$$\tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{AD}{8}$$

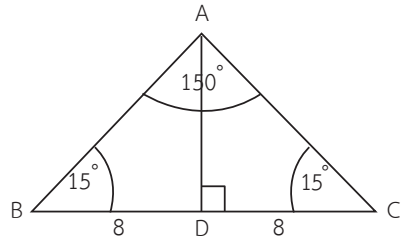
$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{AD}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore AD &= \frac{8(\sqrt{3} - 1)}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{8(3 - 2\sqrt{3} + 1)}{2} \\ &= 8(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \Delta ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 16 \times 8(2 - \sqrt{3}) \\ &= 64(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\therefore 2 \text{ เท่าของพื้นที่ } \Delta ABC \text{ จึงเท่ากับ } 2(64)(2 - \sqrt{3}) = 128(2 - \sqrt{3})$$

**เทคนิค**

ข้อนี้ต้องหามุมที่เหลือจากข้อมูลโจทย์แล้วจึงหาความสัมพันธ์ของค่ามุม โดยมุมภายใน Δ รวมกัน = 180° จึงทำให้รู้ค่ามุมที่เหลือ หลังจากนั้นใช้สูตร $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ แล้วจึงไปหาพื้นที่ ΔABC โดย พท. $\Delta ABC = 2$ พท. ΔABD

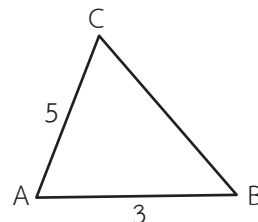
13 ตอบ ข้อ 1 $8 + 4\sqrt{2}$

วิธีทำ เราจะหาด้าน BC โดยใช้กฎของ \cos ที่มุม A

$$\text{จากข้อมูล } \arccos\left(\frac{-1}{15}\right) = B + C \text{ ดังนั้น } \cos(B + C) = -\frac{1}{15}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos A \text{ จึงเท่ากับ } -\cos(B + C) = -\left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15}$$

(เนื่องจากมุม A, B, C รวมกันเท่ากับ 180°)



$$\text{สรุปแล้วใช้กฎ } \cos \text{ จะได้ } BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos A$$

$$= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\left(\frac{1}{15}\right) = 32$$

$$\text{ดังนั้น } BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ความยาวรอบรูป } \triangle ABC = 5 + 3 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องหาด้านที่เหลือโดยใช้กฎของ \cos คือ $C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$ แล้วจึงสามารถหาความยาวรอบรูป \triangle ได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ของ $\arccos(A) = B \therefore \cos B = A$

14 ตอบ ข้อ 2 3

$$\text{วิธีทำ} \quad \text{จากโจทย์ } 2\arcsin(x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$$

$$\arcsin(x^2 - 3x + 1) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = x^2 - 3x + 1$$

$$-1 = x^2 - 3x + 1$$

$$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1, 2$$

$$\text{ดังนั้น } |1 + 2| = |3| = 3$$

เทคนิค

ข้อนี้ย้ายสมการให้เหลือ \arcsin แล้วจึงแก้สมการหาค่า x แล้วจึงนำค่า x ที่ได้ทั้งหมดไปบวกกัน ใช้หลักการที่ $\arccos(A) = B \therefore \cos B = A$ และหลังจากนั้นต้องการหาค่า x โดยการแก้สมการ

15 ตอบ ข้อ 5 $\frac{1}{9}$ วิธีทำ $(\cos 2A + \cos B)^2 + (\sin 2A + \sin B)^2 = 3$

$$\cos^2 2A + 2\cos 2A \cos B + \cos^2 B + \sin^2 2A + 2\sin 2A \sin B + \sin^2 B = 3$$

$$(\cos^2 2A + \sin^2 2A) + (\cos^2 B + \sin^2 B) + 2\cos 2A \cos B + 2\sin 2A \sin B = 3$$

$$1 + 1 + 2(\cos 2A \cos B + \sin 2A \sin B) = 3$$

$$\therefore \cos (2A - B) = \frac{1}{2}$$

โดยโจทย์ให้ C เป็นมุมฉาก ดังนั้น $A + B = 90^\circ$ และ $A \leq B$ ดังนั้น $0 \leq A \leq 45^\circ$, $45^\circ \leq B \leq 90^\circ$ ดังนั้น มุมที่จะเป็นไปได้ของ $2A - B$ คือ $-90^\circ \leq 2A - B \leq 45^\circ$ แต่ $\cos(2A - B) = \frac{1}{2}$ ดังนั้นมุม $2A - B$ จึงเท่ากับ -60°

$$\text{จะได้ } 2A - B = -60^\circ \text{ ——— ①}$$

$$A + B = 90^\circ \text{ ——— ②}$$

$$\text{ดังนั้น } 3A = 30^\circ$$

$$\therefore \tan^4 30^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องแก้สมการหามุม A, B โดยใช้ข้อมูลจากโจทย์แล้วดูความเป็นไปได้ของมุมที่เกิดขึ้น แล้วจึงนำไปหาคำตอบ โดยใช้ $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$, $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

16 ตอบ ข้อ 4 $\frac{9}{16}$

วิธีทำ ใช้กฎของ sin ในการหา cos A

$$\text{จะได้ว่า } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\text{จะเห็นว่า } \hat{B} = 2\hat{A} \text{ ดังนั้น } \frac{\sin 2A}{\sin A} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \cos A = \frac{3}{4} \text{ ดังนั้น } |\cos^2 A| = \left|\left(\frac{3}{4}\right)^2\right| = \left|\frac{9}{16}\right| = \frac{9}{16}$$

เทคนิค

$$\text{ข้อนี้ใช้กฎ } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} ; a \text{ ด้านตรงข้ามมุม } A$$

b ด้านตรงข้ามมุม B

c ด้านตรงข้ามมุม C

เพื่อใช้หาความสัมพันธ์ของมุม A, B แล้วจะได้ค่า cos A ซึ่งเป็นคำตอบ

17 ตอบ ข้อ 2 $\frac{\pi}{3}$

วิธีทำ จาก $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{-2}{3}$ จะได้ $2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{-2}{3}$ — ①

จาก $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ จะได้ $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ — ②

เอาสมการ ① ÷ ② จะได้ $\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ โดยที่ $\frac{\alpha + \beta}{2} = -\frac{\pi}{6}$

ดังนั้น $\alpha + \beta = \frac{-\pi}{3} \rightarrow -(\alpha + \beta) = -\alpha - \beta = -\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตรเพื่อสร้างรูปแบบสมการแล้วจึงแก้มุม $\alpha + \beta$

$$\text{ใช้ } \sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

18 ตอบ ข้อ 4 9

วิธีทำ ให้ $\tan^{-1} \sqrt{2} = \theta$ ดังนั้น $\tan \theta = \sqrt{2}$

และ $\sec^2 2\theta = 1 + \tan^2 2\theta$

$$\begin{aligned} \sec^2 2\theta &= 1 + \left(\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1 - (\sqrt{2})^2} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} \right)^2 \\ &= 1 + (-2\sqrt{2})^2 = 1 + 8 = 9 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลบวกคำตอบ คือ 9

เทคนิค

ข้อนี้ต้องใช้สูตร $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ และ $\tan^2 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ มาใช้เพื่อหาคำตอบ

19 ตอบ ข้อ 3 $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

วิธีทำ $\cos 2A + 3\cos 2B = -2$

$$(2\cos^2 A - 1) + 3(2\cos^2 B - 1) = -2$$

$$2\cos^2 A - 1 + 6\cos^2 B - 3 = -2$$

$$2\cos^2 A + 6\cos^2 B = 2$$

$$\therefore \cos^2 A + 3\cos^2 B = 1$$

โดย $\cos A - \sqrt{2} \cos B = 0 \rightarrow \cos A = \sqrt{2} \cos B$

แทนค่า $(\sqrt{2} \cos B)^2 + 3\cos^2 B = 1$

$$2\cos^2 B + 3\cos^2 B = 1$$

$$\therefore 5\cos^2 B = 1 \rightarrow \cos B = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} ; \text{มุม } B \text{ เป็นมุมแหลม } \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น $\cos A = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

หา $\sin A$ โดย $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\sin^2 A + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin A = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} ; \text{มุม } A \text{ เป็นมุมแหลม } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

หา $\sin B$ โดย $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\sin^2 B + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin B = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} ; \text{มุม } B \text{ เป็นมุมแหลม } \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

เนื่องจากมุม $A + B + C = 180^\circ$ ดังนั้น $\cos C = \cos (180^\circ - A - B)$
 $= -\cos (A + B)$

$$\therefore -\cos (A + B) = -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{1}{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$\text{ดังนั้น } 5 \cos C = 5 \left(\frac{1}{5} \right) (2\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

เทคนิค

ให้จัดรูปของสมการที่โจทย์ให้มาและหาความสัมพันธ์ของสมการก็จะหาค่าของ \sin และ \cos ได้จากข้อมูลที่โจทย์ให้มา

20 ตอบ ข้อ 4 $\frac{9}{4}$

วิธีทำ $\cos \frac{7\pi}{6} \left(\sin \frac{5\pi}{3} - 2\sin \frac{8\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} \left(-\sin \frac{\pi}{3} - 2\sin \frac{2\pi}{3} \right)$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sin \frac{\pi}{3} \right] = \frac{-\sqrt{3}}{2} \left[\frac{-\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] = \frac{-\sqrt{3}}{2} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9}{4}$$

เทคนิค

ให้เช็ก Quadrant (Q) ก่อนแล้วค่อยแปลงค่าเป็นมุมเล็ก

ซึ่งจะง่ายต่อการหาค่าโดย Q ที่เป็นบวกคือ

| | |
|-----|-----|
| sin | All |
| tan | cos |

21 ตอบ ข้อ 1 ข้อ ก และ ข ถูก

วิธีทำ ก. $\cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \therefore \text{ข้อ ก ถูก}$$

ข. $\cos \frac{\pi}{5} = \cos 2 \left(\frac{\pi}{10} \right) = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{10} = 1 - 2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \therefore \text{ข้อ ข ถูก}$

เทคนิค

ข้อนี้ทั้งข้อ ก, ข ต้องพยายามแปลงโจทย์ให้เข้าสูตรเพื่อหาคำตอบ ต้องรู้สูตร

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2\cos A \sin B, \cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$$

22 ตอบ ข้อ 2

วิธีทำ $(\sec \theta - \tan \theta) (\sec \theta + \tan \theta)^2 = (\sec \theta - \tan \theta) (\sec \theta + \tan \theta) (\sec \theta + \tan \theta)$

$$= (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) (\sec \theta + \tan \theta) = (\sec \theta + \tan \theta) = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

เทคนิค

ข้อนี้ใช้สูตร $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ มาใช้ในการแก้ แล้วจึงพยายามแปลงคำตอบให้เข้ากับตัวเลือก

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

23 ตอบ ข้อ 5 5

วิธีทำ จาก $f(2) = 3 \rightarrow 3 = a \sin 2 + 2b \cos 2 + 4$

$$-1 = a \sin 2 + 2b \cos 2 \text{ ——— ①}$$

$$\therefore f(-2) = a \sin (-2) - 2b \cos (-2) + 4$$

$$= -a \sin 2 - 2b \cos 2 + 4$$

$$= -(a \sin 2 + 2b \cos 2) + 4 = -(-1) + 4 = 5$$

เทคนิค

ข้อนี้จะเห็นว่าเป็นโจทย์ฟอร์มที่ไม่ต้องหาค่า \sin , \cos ก็สามารถหาคำตอบได้โดยการจัดรูปแบบให้เข้ากับข้อมูลโจทย์ที่ได้มา $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

24 ตอบ ข้อ 1 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

วิธีทำ ลองแทนมุมง่าย ๆ เช่น $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \tan \alpha = \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \qquad \therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\cos \alpha}{\sin \beta + \cos \beta} = \frac{\cos \frac{\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 0} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เทคนิค

ให้ทดลองแทนมุมที่เราสามารถรู้ค่าได้และตรวจสอบว่าถูกหรือไม่ หลังจากนั้นลองนำคำตอบที่ได้ไปแทนในสิ่งที่โจทย์ถาม เนื่องจากโจทย์เป็นโจทย์ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างโจทย์กับคำถาม

25 ตอบ ข้อ 4 $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \text{จากโจทย์ } \sin 2\alpha - \sin 2\beta = (2 \sin \alpha \cos \alpha)(2 \sin \beta \cos \beta) \\
 &= (2 \sin \alpha \sin \beta)(2 \cos \alpha \cos \beta) \\
 &= [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\
 &= \left[\frac{3+4\sqrt{3}}{10} - \frac{3-4\sqrt{3}}{10} \right] \left[\frac{3-4\sqrt{3}}{10} + \frac{3+4\sqrt{3}}{10} \right] \\
 &= \frac{12\sqrt{3}}{25}
 \end{aligned}$$

เทคนิค

ข้อนี้ต้องจัดรูปแบบความสัมพันธ์ของโจทย์ให้เข้ากับข้อมูลที่ให้มา โดยการจัดให้เป็นรูปแบบสูตร $\cos(A + B) + \cos(A - B) = 2\cos A \cos B$
 $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$

26 ตอบ ข้อ 1 $\frac{11}{32}$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad & \text{จากโจทย์ } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{A}{2} - \frac{5A}{2} \right) - \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{5A}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos 3A) \\
 &= \frac{1}{2} [(2 \cos^2 A - 1) - (4 \cos^3 A - 3 \cos A)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(2 \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 1 \right) - \left(4 \left(\frac{3}{4} \right)^3 - 3 \left(\frac{3}{4} \right) \right) \right] = \frac{11}{32}
 \end{aligned}$$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องเอา $\frac{1}{2}$ คูณไปก่อนเพื่อจัดรูปเข้าสูตรแล้วจึงแทนค่าตามข้อมูลที่ให้มาเพื่อใช้หาคำตอบ
 สูตรที่ใช้คือ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$
 และ $\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2\sin A \sin B$

27 ตอบ ข้อ 4 1

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin \alpha - 2 \sin \beta = 0$ จัดรูปเป็น $\sin \alpha = 2 \sin \beta$ — ❶

และยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta$

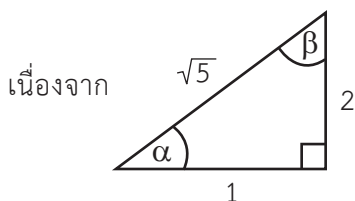
และจาก $3 \cos 2\alpha - 2 \cos 2\beta = -3 \rightarrow 3(1 - 2\sin^2 \alpha) - 2(1 - 2\sin^2 \beta) = -3$

$$3 - 6\sin^2 \alpha - 2 + 4\sin^2 \beta = -3 \rightarrow 1 - 6\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha = -3$$

$$-5\sin^2 \alpha = -4 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \quad \text{ดังนั้น } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

เอาค่า $\sin \alpha$ ไปแทนในสมการ ❶ จะได้ $\sin \beta = \frac{1}{2} \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

จากข้อมูลจะสามารถหาความสัมพันธ์ได้ว่า $\alpha + \beta = 90^\circ$



ซึ่งเป็น Δ มุมฉาก ดังนั้น $\sin(\alpha + \beta) = 1$

เทคนิค

จัดรูปสมการและตั้งเป็นสมการที่ ❶ เพื่อจัดอีกรูปและแทนสมการที่ 1 ลงในอีกสมการ เพื่อหาความสัมพันธ์ของมุม α และ β

28 ตอบ ข้อ 3 3

วิธีทำ จากสูตร $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } a &= \frac{1 + \cos 80^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 40^\circ}{2} - \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos 80^\circ + 1 + \cos 40^\circ - 1 - \cos 20^\circ] \\ &= \frac{1}{2} (1 + \cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) \cos 20^\circ - \cos 20^\circ \right) \\ &= \frac{1}{2} (1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{และ } b = \left(\frac{1}{\tan 10^\circ} - \tan 10^\circ \right) \tan 20^\circ = \left(\frac{1 - \tan^2 10^\circ}{\tan 10^\circ} \right) (\tan 20^\circ)$$

$$\text{เอา } \frac{2}{2} \text{ คูณจะได้ } 2 \left(\frac{1 - \tan^2 10^\circ}{2 \tan 10^\circ} \right) (\tan 20^\circ) = \left(\frac{2}{\tan 2(10^\circ)} \right) (\tan 20^\circ) = 2$$

$$\text{ดังนั้น } 2a + b = 2 \left(\frac{1}{2} \right) + 2 = 3$$

เทคนิค

ข้อนี้หาค่า a, b จะต้องใช้เทคนิคการแปลงรูปแบบโจทยให้เข้ากับสูตร

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \text{ และ } \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \text{ เป็นต้น}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

29 ตอบ ข้อ 1 1

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \text{ ปรับเป็น } & 8 \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8} \right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{8} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 8 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(1 - \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 8 \sin^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{3\pi}{8} \\ &= 2 \left(2 \sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} \right)^2 \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} \right) \right)^2 \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 \right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

เทคนิค

ข้อนี้จะสังเกตเห็นว่าสามารถปรับมุมบางมุมให้สอดคล้องกับรูปแบบโจทยได้คือ

$$\cos \frac{5\pi}{8} = \cos \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) = -\cos \left(\frac{3\pi}{8} \right) \text{ เป็นต้น จะทำให้ง่ายต่อการหาคำตอบ}$$

30 ตอบ ข้อ 2 -1

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin \theta \sec \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)$ จะได้เป็น $\sin \theta (-\operatorname{cosec} \theta)$

$$= \sin \theta \left(-\frac{1}{\sin \theta} \right) = -1$$

เทคนิค

ข้อนี้จะเห็นว่าเราไม่จำเป็นจะต้องนำข้อมูล $\frac{1}{\sin \theta + 1} - \frac{1}{\sin \theta - 1} = 4$

มาใช้ในการหาคำตอบเลย เนื่องจากเราจะใช้หลัก $\sec \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\operatorname{cosec} \theta$

แปลงรูปแบบเพื่อหาคำตอบได้เลย $\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$

31 ตอบ ข้อ 4 $\frac{39}{28}$

วิธีทำ จัดรูปข้อมูลเป็น $3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta + \sin \theta = 1 - 4 \sin^3 \theta$

จะได้ $\sin \theta = \frac{1}{4}$

โดยที่ $\sec 2\theta + \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \theta \right) = \frac{1}{\cos 2\theta} + \sin \theta = \frac{1}{1 - 2 \sin^2 \theta} + \sin \theta$

$$= \frac{1}{1 - 2 \left(\frac{1}{4} \right)^2} + \frac{1}{4} = \frac{39}{28}$$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องจัดข้อมูลจากโจทย์เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปแทนค่าหาคำตอบจะเป็น

วิธีที่ง่ายที่สุด ซึ่งต้องใช้สูตรมาช่วยด้วย $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

32 ตอบ ข้อ 1 $\left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$

วิธีทำ ปรับเป็น $2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 2 \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$

ลองให้ $a = \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$ เพื่อให้ง่ายต่อการมอง

\therefore จะได้ $a^2 + 1 = 2a \rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \rightarrow (a - 1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$

ดังนั้น $1 = \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$ ยกกำลัง 2 ทั้ง 2 ข้างจะได้ $1 = \sin^2 x + \sin x$

$\therefore 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \rightarrow (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

ดังนั้น $\sin x = \frac{1}{2}, -1 \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ และ $\frac{3\pi}{2}$ อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$

เทคนิค

ข้อนี้เราจะใช้การสมมติตัวแปรให้ง่ายต่อการมองและแยกตัวประกอบจึงจะสามารถหามุมได้

33 ตอบ ข้อ 1 0.28

วิธีทำ จากโจทย์ $\theta = \arctan \frac{3}{4}$ จะได้ว่า $\tan \theta = \frac{3}{4}$

$$\text{ดังนั้น } \cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1 - \frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{7}{16} \times \frac{16}{25} = 0.28$$

เทคนิค

ข้อนี้เราต้องใช้สูตร $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ เพื่อปรับให้เข้ากับสิ่งที่โจทย์ให้มา
จะสามารถหาคำตอบได้ง่ายขึ้น

$$\arctan A = B, \tan B = A$$

34 ตอบ ข้อ 3 $(-2, 2)$

วิธีทำ ปรับเป็น $\arctan(1 + x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(1 - x)$

เอา \tan คูณทั้ง 2 ข้างจะได้ $1 + x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(1 - x)\right)$

$$1 + x = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - (1 - x)}{1 + \left(\tan \frac{\pi}{4}\right)(1 - x)} \rightarrow 1 + x = \frac{1 - (1 - x)}{1 + (1 - x)}$$

$$1 + x = \frac{x}{2 - x} \rightarrow (1 + x)(2 - x) = x \rightarrow 2 + x - x^2 = x$$

$$\therefore x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{2}, -\sqrt{2} \text{ จึงอยู่ในช่วง } (-2, 2)$$

เทคนิค

ข้อนี้เราจะจัดรูปโดยการเอา \tan คูณทั้ง 2 ข้างเพื่อปรับโจทย์ให้สามารถใช้สูตร

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + (\tan A)(\tan B)} \text{ ได้ แล้วจึงหาค่า } x \text{ ต่อไป}$$

$$\arctan \cdot \tan A = A ; x \in \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$$

35 ตอบ ข้อ 1 $\frac{-2x}{1+x^2}$

วิธีทำ สมมติให้ $A = \arctan x$ ดังนั้น $\tan A = x$

$$\text{สรุปได้ว่า } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2A\right) = -\sin 2A = \frac{-2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$$

$$\text{นั่นคือเท่ากับ } \frac{-2x}{1+x^2}$$

เทคนิค

ข้อนี้เราจะสมมติค่า \arctan ก่อน แล้วจึงปรับเป็น \tan เพื่อให้ง่ายต่อการมองและแทนค่าเพื่อหาคำตอบ

36 ตอบ ข้อ 2 90°

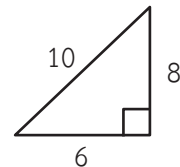
วิธีทำ จากโจทย์ $\frac{\sin A}{2} = \frac{3 \sin B}{8} = \frac{3 \sin C}{10}$ ลองเอา 3 หารเพื่อให้เข้ากฎของ sin

$$\text{จะได้ } \frac{\sin A}{6} = \frac{\sin B}{8} = \frac{\sin C}{10}$$

ดังนั้นด้าน $a = 6$ ด้าน $b = 8$ และด้าน $c = 10$

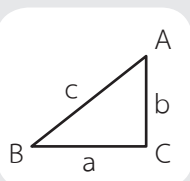
ดังนั้นจากข้อมูลจึงสามารถสร้างรูป Δ มุมฉากได้

โดยเข้าหลักพีทาโกรัส จึงสรุปได้ว่า มุมที่ใหญ่ที่สุดคือ มุม 90° นั่นเอง



เทคนิค

ข้อนี้เราปรับเข้ากฎของ sin จะเห็นว่าจะได้ด้านทั้ง 3 เข้าสู่กฎพีทาโกรัส จึงได้มุมที่ใหญ่ที่สุดคือ 90°

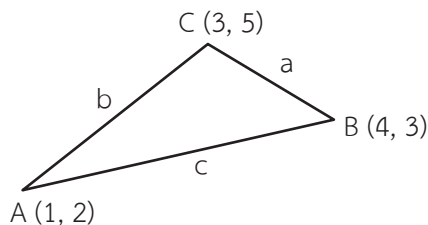


กฎของ sin $= \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$; a เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A
 มุมภายใน $\Delta = 180^\circ$; b เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม B
 c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม C

37 ตอบ ข้อ 4 $\left(\frac{\sqrt{50} - 1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จากโจทย์ $\sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}$ ดังนั้นเราจึงต้องหาค่า $\cos B$ ก่อน

เราจะวาดรูปได้เป็น



เราต้องหาค่า a, b, c โดยใช้สูตรคือ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ดังนั้น $a = \sqrt{(4 - 3)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{5}$

$b = \sqrt{(3 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{13}$

$c = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10}$

เราจะใช้กฎของ \cos ในการหาค่า $\cos B$ คือ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

ได้เป็น $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 - (\sqrt{13})^2}{2(\sqrt{5})(\sqrt{10})} = \frac{1}{\sqrt{50}}$

ดังนั้น $\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{50} - 1}{2\sqrt{50}}} = \left(\frac{\sqrt{50} - 1}{2\sqrt{50}} \right)^{\frac{1}{2}}$

เทคนิค

ข้อนี้ใช้กฎของ \cos ในการแก้หา $\cos B$ โดย a, b, c ต้องใช้สูตรระยะห่างระหว่างจุด เพื่อใช้แทนค่าแล้วจึงเอาค่า $\cos B$ ไปแทนในโจทย์ต่อไป

สูตรหาระยะห่างระหว่างจุด 2 จุด $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

สูตรมุมครึ่ง $\sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}$

กฎของ \cos ; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

38 ตอบ ข้อ 1 $2 \cot^2 \theta$

วิธีทำ ปรับเป็น
$$\frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\cos \theta}} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin \theta \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$= 2 \cot^2 \theta$$

เทคนิค

ข้อนี้นำสูตรมาใช้ในการปรับรูปแบบโจทย์เพื่อให้สามารถหาคำตอบจากโจทย์ได้ง่ายมากขึ้น
สังเกต $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$, $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

39 ตอบ ข้อ 4 $-\frac{4}{3}$

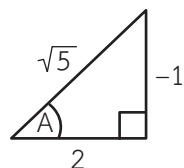
วิธีทำ ให้ $\arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = A$ ดังนั้น $\sin A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ จะเห็นว่ามุม A อยู่ใน Q_4

เราจึงรู้ว่า $\tan A = \frac{-1}{2}$

ดังนั้น $\tan \left(2 \arcsin \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right) = \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \sin^2 A}$

$$= \frac{2 - \left(-\frac{1}{2} \right)}{1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2}$$

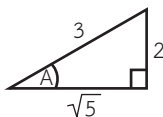
$$= \frac{-4}{3}$$

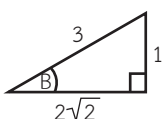
**เทคนิค**

ข้อนี้ต้องสมมติค่า \arcsin ให้เป็นตัวแปรก่อน แล้วจึงได้ค่า $\sin A$ หลังจากนั้นจึงปรับเพื่อหาค่า $\tan A$ แล้วจึงแทนค่าเพื่อหาคำตอบ

40 ตอบ ข้อ 4 $\frac{2}{27} (7 + 2\sqrt{10})$

วิธีทำ หา $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f\left(\arcsin \frac{2}{3} + 2\arcsin \frac{1}{3}\right)$

สมมติให้ $\arcsin \frac{2}{3} = A$ ดังนั้น $\sin A = \frac{2}{3}$  $\therefore \cos A = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\arcsin \frac{1}{3} = B$ ดังนั้น $\sin B = \frac{1}{3}$  $\therefore \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $= \sin (A + 2B)$

$$= \sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)(1 - 2\sin^2 B) + \cos A (2\sin B \cos B)$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{9}\right) + \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$$

$$= \frac{14}{27} + \frac{4\sqrt{10}}{27}$$

$$= \frac{2}{27} (7 + 2\sqrt{10})$$

เทคนิค

ข้อนี้ลองสมมติ \arcsin เป็นตัวแปรให้ง่ายต่อการมอง แล้วจึงหาค่า \sin และ \cos แล้วจึงแปลง $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ หลังจากนั้นจึงเอาค่า \sin และ \cos ที่หาได้ไปแทนในโจทย์ $\sin (A + B)$ เพื่อหาคำตอบ

41 ตอบ ข้อ 4 $\frac{33}{65}$

วิธีทำ 1. เขียนค่า $\cos C$ ในรูปของมุม A กับ B

เนื่องจากมุม A, B, C เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม ดังนั้น $C = 180^\circ - (A + B)$
หาค่า $\cos C$

$$\begin{aligned}\cos C &= \cos(180^\circ - (A + B)) \\ &= \cos(180^\circ)\cos(A + B) + \sin(180^\circ)\sin(A + B) \\ &= (-1)\cos(A + B) + (0)\sin(A + B) \\ &= -\cos(A + B) + 0 \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\ &= \sin A \sin B - \cos A \cos B\end{aligned}$$

2. คำนวณค่า $\cos C$

แทนค่า $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\sin B = \frac{12}{13}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$
ลงในสมการด้านบน

จะได้ $\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{33}{65}\end{aligned}$$

เทคนิค

เนื่องจากเราไม่รู้ว่า Δ ที่โจทย์บอกเป็นแบบไหน แต่เราทราบว่า
มุมภายใน $\Delta = 180^\circ$ เราจึงรู้ว่า $\cos C = \cos(180^\circ - (A + B))$

เมื่อเรารู้ค่า $\cos C$ เราก็จะหาคำตอบได้

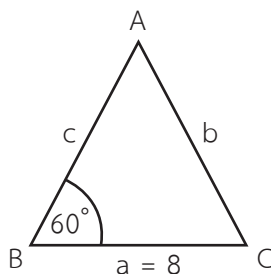
สูตร $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

42 ตอบ ข้อ 3 36

วิธีทำ 1. วิเคราะห์ว่าควรใช้กฎของไซน์หรือโคไซน์

โจทย์บอกข้อมูลมุม B และความยาวของด้านตรงข้ามมุม B ซึ่งชี้ให้เห็นว่าควรใช้กฎของโคไซน์ที่มุม B

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2(a)(c)\cos B$$



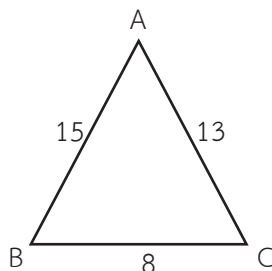
2. แทนค่า $B = 60^\circ$, $a = 8$ และ $c = b + 2$ ลงในสมการที่ได้

$$b^2 = (8^2) + (b + 2)^2 - 2(8)(b + 2)\cos 60^\circ$$

$$b^2 = 64 + b^2 - 4b + 4 - 16$$

$$4b = 52$$

$$b = 13$$



3. แทนค่า b เพื่อหาค่า c และ a

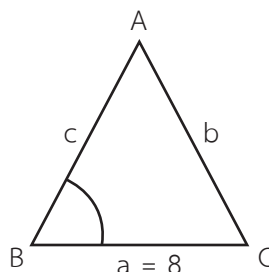
ซึ่งจะได้ $b = 13$, $c = b + 2 = 15$ และจาก $a = 8$

\therefore รวมกันได้ความยาวรอบรูปสามเหลี่ยมเป็น 36

เทคนิค

ใช้กฎของโคไซน์

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2(a)(c)\cos B$$



ทะลุโจทย์

คณิตศาสตร์



ม.ปลาย PAT+ วิชาสามัญ

อัดแน่นด้วย

ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลายกว่า 500 ข้อ

พร้อมเฉลยและเทคนิคการทำข้อสอบ

ให้ได้คะแนนเต็ม!



เจาะลึกและทิวเข้ม!

แนวข้อสอบ PAT & วิชาสามัญ

เพื่อการสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกรูปแบบ

เนื้อหาเข้มข้น อ่านเข้าใจง่าย! เล่มเดียวเนื้อหาครบ!

SMART⁺⁺

คู่มือเตรียมตัวสอบ

O-NET GAT PAT วิชาสามัญ

คุณภาพระดับพรีเมียม

การันตีเนื้อหาแม่นยำ **SURE 100%**

ISBN

คู่มือเรียน-สอบ

ราคา บาท



9 786167 972169